unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

Licenciatura em Matemática

UNIOESTE - Campus de Cascavel

ANDRÉ LUIZ ZANIN DA CRUZ

CLEISON RIBEIRO SOTEL

WILLIAM FELIPE PINHEIRO

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO II

PROMAT II

CASCAVEL

2023

ANDRÉ LUIZ ZANIN DA CRUZ
CLEISON RIBEIRO SOTEL
WILLIAM FELIPE PINHEIRO

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO II

PROMAT II

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação.
Orientador: Prof. Plinio Lucas Dias Andrade e Pamela Gonçalves

CASCAVEL
2023

AGRADECIMENTOS

Queremos agradecer a todos que colaboram de forma positiva para que o PROMAT ocorresse, e a Deus que acreditamos que esteve presente de forma espiritual.

Aos professores Plinio Lucas Dias Andrade e Pamela Gonçalves, pela orientação durante todo o processo, e por nos guiarem para que chegássemos a um bom desempenho e podermos desenvolver uma aprendizagem significativa para a nossa vida.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

1. **Introdução**

O presente trabalho tem por objetivo relatar as atividades desenvolvidas durante o Estágio Supervisionado do Curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

O estágio em questão consistiu na aplicação do PROMAT (Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas) no período de 11 de março de 2023 a 27 de maio de 2023, ocorrendo na sala A205, exceto no sexto encontro onde ocorreu na sala B103. Este projeto foi desenvolvido pelos estagiários com amor, carinho e dedicação e ao longo deste projeto, além de alunos nós tivemos amigos, que estavam a cada aula ali para aprender algo sobre matemática.

Na sequência disponibilizamos os planejamentos que construímos durante o período de execução do Promat, além de conter relatos de cada aula, onde relatamos a nossa visão de como foi cada momento. Podemos adiantar que este estágio foi concluído com sucesso, ocorrendo conforme planejamos, com exceção de pequenos desvios no gerenciamento do tempo das aulas.

2. **Promat**

O projeto PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas, com ênfase na área de Matemática, foi implementado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, no Campus de Cascavel. Nele, são oferecidos conteúdos de Matemática da Educação Básica necessários para os vestibulares da Unioeste, para o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e outros processos seletivos, através de um "Curso Preparatório de Matemática". O principal objetivo era que os alunos assimilassem determinados conteúdos, conceitos e estruturas matemáticas.

As aulas são ministradas por estagiários do Curso de Licenciatura em Matemática, sob a supervisão e orientação dos professores do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática. Os encontros ocorrem aos sábados pela manhã e totalizam 10 sessões de 200 minutos cada. Alunos do Ensino Médio da rede pública de Cascavel e região, bem como ingressantes no curso de Matemática e em outras áreas que se inscreveram no projeto, são atendidos, recebendo ao final uma certificação condicionada a frequência.

2.1. **Opção Teórica e Metodológica.**

Ao introduzir o *Excel* como uma estratégia no ensino da Matemática, estamos fornecendo aos alunos uma oportunidade de desenvolver suas habilidades com uma ferramenta amplamente utilizada no mundo corporativo visto que em um cenário cada vez mais digital e tecnológico, o domínio do Excel é uma habilidade requisitada por diversas áreas profissionais. Aprofundar-se no uso do *Excel* não apenas fortalece o entendimento dos conceitos matemáticos, mas também permite aos alunos adquirir competências relevantes para o mercado de trabalho, oferecendo-lhes uma vantagem competitiva ao ingressarem no mercado de trabalho, tias competências como análise de dados, resolução de problemas complexos e organização eficiente de informações, o que vai de encontro com:

> [...] novas habilidades, como selecionar informações e analisá-las e, a partir disso, tomar decisões, serão necessárias e exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matematicamente diferentes, que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio. Essas novas habilidades desenvolverão no aluno a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações. (RML Araújo, et al, 2005, p 4)

Além disso, a utilização do Excel no contexto educacional pode promover uma abordagem mais prática e aplicada da Matemática, aproximando-a do cotidiano dos alunos e tornando seu aprendizado mais significativo.

As três metodologias ativas utilizadas foram: Gamificação ou *Game Based Learning* (GBL) com o uso do *Excel* para criar jogos matemáticos, *Team-based Learning* (TBL) e Resolução de Problemas. Cada uma dessas abordagens proporcionou dinâmicas diferenciadas e estratégias pedagógicas para engajar os alunos e promover um aprendizado significativo.

Por meio de jogos, os alunos puderam praticar conceitos matemáticos, resolver problemas e aprimorar suas habilidades de forma divertida e envolvente. O *Excel* proporcionou recursos e funcionalidades que tornaram os jogos interativos e desafiadores, estimulando a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem, e assim estimulando a permanência dos alunos no projeto. Seguindo as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a incorporação de jogos como recurso pedagógico desempenha um papel significativo pois:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46).

O *Team-based Learning* (TBL) foi outra metodologia adotada, na qual os alunos foram organizados em equipes para resolver problemas e desafios matemáticos. Essa abordagem colaborativa permitiu que os estudantes trocassem conhecimentos, discutissem estratégias e construíssem soluções coletivas, promovendo o aprendizado mútuo e o desenvolvimento social em sala de aula.

Além disso, a metodologia de *Design Thinking* foi aplicada para instigar questionamentos sobre a Matemática, que ocorreram por vezes com a projeção de gráficos pelo *Excel*. Os alunos foram incentivados a explorar a disciplina de forma criativa, a partir de problemas matemáticos do cotidiano, propondo soluções e fazendo isso em grupos. O *Design Thinking* trouxe uma abordagem prática e contextualizada, estimulando o pensamento crítico e a resolução de problemas de forma criativa.

A metodologia de resolução de problemas também foi utilizada durante o projeto. Por meio dessa abordagem, os alunos foram desafiados a solucionar problemas, aplicando seus conhecimentos e habilidades para encontrar soluções. A resolução de problemas permitiu aos alunos desenvolverem o raciocínio lógico, a capacidade de análise e a criatividade na busca por soluções eficientes.

A combinação dessas três metodologias, Gamificação ou *Game Based Learning* (GBL) com o uso do *Excel*, *Team-based Learning* (TBL), *Design Thinking* e resolução de problemas, permitiu uma abordagem diferente do convencional para o ensino de Matemática. Os alunos puderam experimentar jogos matemáticos interativos, desenvolver suas habilidades e conhecimentos, ao mesmo tempo em que exploraram a Matemática de maneira prática, criativa e colaborativa.

Referências:

ARAÚJO, Rosane Maria Lima et al. A planilha Excel como instrumento pedagógico na formação do professor de matemática. **Zetetike**, v. 13, n. 1, p. 137-160, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação Secretaria de educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DESIGN Thinking na educação: mais criatividade e iniciativa na IES. Saraiva Educação, 2021. Disponível em: https://blog.saraivaeducacao.com.br/design-thinking-na-educacao/. Acesso em: 17 Jun. 2023.

LEAL JUNIOR, Luiz Carlos; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas como prática sociointeracionista. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, p. 955-978, 2015.

MARQUES, Ana Paula Ambrósio Zanelato et al. A experiência da aplicação da metodologia ativa Team Based Learning aliada à tecnologia no processo de ensino e de aprendizagem. 2019.

2.2. Cronograma

Análise combinatória		
1	11/mar	Apresentação
		Princípio fundamental da contagem
		Fatorial e permutação
2	18/mar	Arranjo
		Combinação
		Probabilidade
Geometria analítica		
3	25/mar	Coordenadas cartesianas
		Distância entre dois pontos
		Ponto médio
		Pontos colineares (Determinante)
4	01/abr	Equação geral e reduzida da reta
		Posições relativas de duas retas no plano
5	15/abr	Eq geral e reduzida da circunferência
		Posições relativas envolvendo ponto, circunferência e reta
Trigonometria		
6	29/abr	Arcos, ângulos, und de medidas rad e graus
		Seno, Cosseno e tangente definição
7	06/mai	Cálculo dos senos, cos e tang. no triângulo retângulo
		Arcos notáveis
		Redução ao primeiro quadrante
Funções trigonométricas		
8	13/mai	Relações trigonométricas e Rel fundamental
9	20/mai	Funções trigonométricas (sen, cos e tag)
Tratamento da informação		
10	27/mai	Estatística básica
		Gráficos e tabelas

3. Planos de aulas e relatórios.

3.1. Plano de aula – 1º Encontro 01 março de 2023.

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Princípio fundamental da contagem, fatorial e permutação;

Objetivo geral: Apresentar o curso do Promat e promover a compreensão do princípio fundamental da contagem, a notação do fatorial e do processo de permutação.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Compreender o princípio fundamental da contagem, a notação de fatorial e o conceito de permutação com e sem repetições;
- Identificar os tipos de problemas que envolvem esses conteúdos e reconhecer as situações cotidianas relacionadas;
- Resolver diferentes tipos de exercícios e problemas sobre princípio fundamental da contagem e permutação com e sem repetições.

Tempo de execução: Uma aula com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook,* Projetor, folha impressa *e Power Point*.

Encaminhamento metodológico:

Realizaremos essa aula com auxílio do projetor presente na sala, projetando lâminas com definições, exemplos e outras informações referentes ao conteúdo. Os alunos serão organizados em grupos de quatro, mas com liberdade para se sentarem da maneira que preferirem.

O referencial metodológico que será adotado nesta aula será o da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que adquiriram no ensino básico, incentivando a pesquisa e o uso diferentes métodos e estratégias de resolução.

Utilizaremos os problemas matemáticos de maneira diversificada, para iniciar determinado conteúdo ou para praticar. Entregaremos após o jogo inicial a folha impressa com o conteúdo programado para esse encontro.

1º Apresentação do curso Promat e dos estagiários (10 min);

Primeiramente, iremos nos apresentar dizendo o nosso nome, em seguida, explicaremos que o Promat é um Projeto de Ensino Institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

Esse curso oferece aos alunos da rede pública a oportunidade de estudar conteúdo do Ensino Básico em aulas ministradas por alunos do curso de graduação em Licenciatura de Matemática, com o objetivo de preparação para vestibulares, concursos e o Exame Nacional do Ensino Médio – Enem.

O Promat é dividido em dois módulos, o primeiro com foco em conteúdo do Ensino Fundamental e no segundo com conteúdo do Ensino Médio, mas devido o calendário da Unioeste este ano o Promat inicia no segundo conteúdo. Parte do tempo será reservado para transmitir outros avisos e apresentar os conteúdos que serão trabalhados no curso.

2º Dinâmica de apresentação dos alunos do Promat (30 min);

Após todos se sentarem, vamos entregar uma bola para um aluno aleatório para que ele responda as seguintes perguntas, "Qual é o seu nome?", "Qual é a sua idade?", "Qual o seu *hobby*?", "Se for o caso, qual curso ou faculdade você deseja fazer após concluir o ensino médio?". Após responder essas questões o aluno deve passar a bola para o colega que estiver mais próximo. Caso não se sinta à vontade para responder essas questões, pode simplesmente passar para outra pessoa. O estudante não é obrigado a responder essas questões. Essas perguntas foram escolhidas com o objetivo de criar uma aproximação maior com os alunos.

Enquanto ocorre essa apresentação, um estagiário vai recolher os nomes dos alunos para depois marcar a presença. Será informado também que um grupo de *Whatsapp* será criado para enviar resoluções de exercícios, retirar dúvidas e dar avisos. Os alunos não serão obrigados a participar no grupo.

3º Jogo *Mastermind* – Introdução ao conteúdo de Análise Combinatória (50 min);

Para motivar os conteúdos que serão trabalhados neste encontro, será proposto um jogo chamado *Mastermind*, que em português é conhecido como Jogo da Senha. Vamos usar as lâminas do *Power Point* para explicar as regras.

Criado por Mordecai Meirowitz na década de 1970, esse jogo foi escolhido por ajudar a melhorar o raciocínio lógico e por ser utilizado no ensino de Análise Combinatória.

Dinâmica do jogo

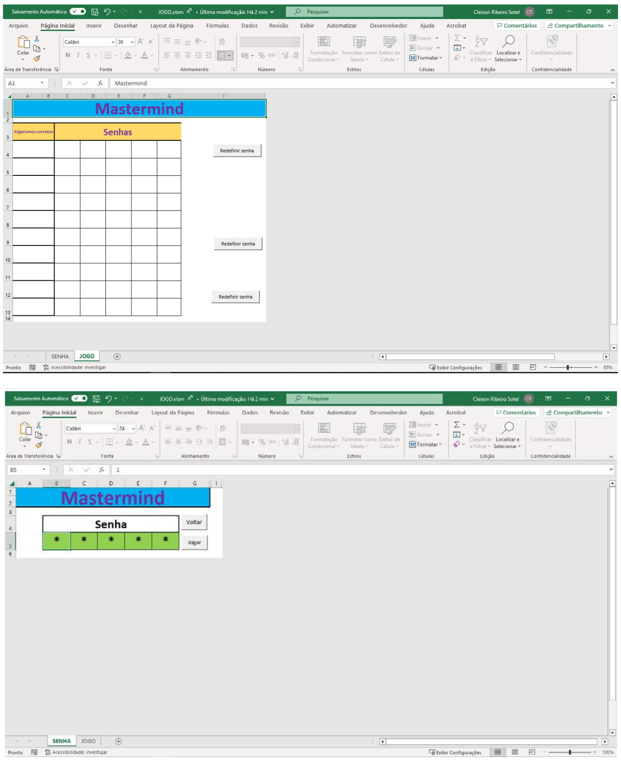
O objetivo é descobrir a senha criada pelo oponente. Essa senha é geralmente formada por uma sequência de quatro ou cinco círculos coloridos, podendo também ser utilizado pinos ou números no local. O jogador deve descobrir a sequência de círculos coloridos estabelecida pelo adversário antes que o número de tentativas termine. São usadas de quatro a seis cores na maioria das partidas, com possibilidade de estender o número de cores.

Após cada tentativa, o adversário deverá relatar se existem cores certas, isto é, se pertencem à senha e se estão no espaço correto, porém sem relatar qual a cor certa. O jogador adversário poderá comentar, por exemplo, “Dos quatro círculos colocados, todos pertencem a senha, mas estão na posição errada”, “Dos quatro círculos colocados, um está na posição certa, dois estão na posição errada e um não pertence a senha”, etc. Cada jogador terá apenas dez tentativas para acertar a senha.

Optamos por utilizar nessa atividade, números ao invés de círculos coloridos, sendo os números do um ao cinco. Também, ao invés de dizer frases as anteriores, o aluno deverá informar quantos números estão na posição correta.

Essa atividade será realizada com grupos de quatro integrantes, sendo duplas contra duplas, cada um discutindo com o colega as combinações para encontrar a senha estabelecida pelos adversários. A dinâmica do jogo será apresentada por meio do *software Excel*. A Figura abaixo apresenta a tabela que será utilizada na apresentação da dinâmica do jogo.

Figura 1: Tabela para apresentação do jogo *Mastermind.*



Fonte: Autores (2023).

Vamos entregar para cada dupla uma folha impressa com a tabela, e para que possam definir a senha e ir realizando as tentativas, os alunos com lápis usarão números de um a cinco, sem repetição de algarismos.

Ganha a dupla que acertar a senha do grupo adversário antes de acabar as 10 tentativas. Caso ninguém vença, vamos considerar um empate. Dependendo do tempo, podemos realizar duas ou três partidas. Não será dado prêmio para os vencedores, mas vamos distribuir antes do intervalo um bombom para cada estudante que participou do jogo.

4º Momento: Introdução ao Princípio Fundamental da Contagem (10 min);

Após a atividade, será explicado que esta foi usada para introduzir o Princípio Fundamental da Contagem e trabalhar outros conteúdos da Combinatória (Permutação, Arranjo e Combinação).

Explicaremos que a contagem está presente em todos os ramos de atuação, mas nem sempre é um processo tão simples, com ela podemos responder perguntas como:

- Quantas placas diferentes de automóveis, formados por quatro letras e três algarismos, podem existir?
- De quantas maneiras diferentes você pode escolher seis números para jogar na Mega - Sena?
- Numa sala de 30 alunos, quantas são as possíveis escolhas de dois representantes?

Para perguntas como estas, contar uma a uma as possibilidades é inviável, então precisamos estabelecer métodos de contagem que nos ajudem, sendo o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) um deles. Em seguida, vamos passar um slide com a definição de PFC, para depois do intervalo realizarmos dois exercícios.

DEFINIÇÃO – Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Se um experimento A pode apresentar x resultados distintos e um experimento B pode apresentar y resultados distintos, então o número de resultados distintos que o experimento composto de A e B pode apresentar, nessa ordem, é dado pelo produto

$$x \cdot y$$

5º Momento: Intervalo.

6º Momento: Exercícios sobre PFC. (20 minutos)

Em seguida, será dado um tempo de dez minutos para os alunos resolverem os dois exercícios abaixo. Esses foram escolhidos por permitirem resoluções por listagem, árvore de possibilidades e pelo próprio PFC. Além disso, a segunda questão é um problema de permutação sem repetição, servindo de motivação para o próximo assunto.

Exercícios I

1- Ana estava se organizando para viajar e colocou na mala 5 calças, 8 blusas e 6 sapatos. Quantas combinações Ana pode formar com uma calça, uma blusa e um sapato?

2- Já tendo acertado um número dentre as cinco posições no jogo Mastermind, quantas senhas diferentes podemos formar escolhendo quatro números (Sem repetição)?

Durante a resolução, os estagiários percorrerão as carteiras tirando possíveis dúvidas, mas não será dado nenhuma resposta direta. Ao invés disso, será realizado questionamentos de modo a guiar os alunos no sentido da solução. Com o fim do tempo, um estagiário irá resolver as questões no quadro, explicitando as diferentes soluções possíveis.

7º Momento: Introdução de número fatorial e permutação com repetição (10 min);

Na sequência vamos apresentar a notação de fatoração, comentando que na Análise Combinatória a multiplicação de números naturais consecutivos é muito frequente, com algumas dessas multiplicações envolvendo muitos fatores. Para simplificar expressões e apresentar resoluções extensas de modo mais abreviado, é adotado o símbolo $n!$, que indica o produto dos n números naturais consecutivos.

DEFINIÇÃO – Fatorial

Seja n um número natural, com $n \geq 1$. Define-se o **fatorial de $\boldsymbol{n}$**, representado por $n!$, como o produto dos números naturais consecutivos $n, n-1, n-2, \ldots, 3,\ 2, 1$. Isto é:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

podendo ser modificado também para

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Casos especiais: $1! = 1$ e $0! = 1$

Exemplos que podem ser colocados no quadro:

a) $2! = 2 \cdot 1$
b) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
c) $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$

Dependendo do tempo restante da aula, proporemos alguns exercícios para os alunos praticarem. O objetivo nesse momento é a familiarização com a notação. Posteriormente, um estagiário resolverá alguns exercícios no quadro.

Exercícios II

Calcule o valor de:

a) $\frac{7!}{4!}$

b) $\frac{3!8!}{4!6!}$

c) $5! - 3!$

d) $\frac{8!}{6!}$

e) $\frac{60!}{59!}$

8º Momento: Permutação com e sem repetição. (30 min)

Como último assunto da aula, trabalharemos a permutação simples e com elementos repetidos. Apresentaremos a definição na lâmina do *Power Point*, explicando que a palavra **permutar** significa trocar os elementos que formam um todo, com a finalidade de obter uma nova combinação.

Vamos usar como exemplo a palavra SORTE, explicando nesse momento que um anagrama dessa palavra seria qualquer agrupamento, tendo ou não significado, obtido da troca de posição de suas letras.

Na lâmina do *Power Point* faremos o seguinte questionamento: Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra SORTE?

Sendo cinco letras distintas, temos cinco possibilidades para a primeira letra. Após essa escolha, haverá quatro possibilidades para a colocação da segunda letra, três possibilidades para a terceira letra, duas possibilidades para a quarta letra e apenas uma possibilidade para a última letra. Usando o Princípio Fundamental da Contagem sucessivamente, vamos ter a operação: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ anagramas.

Cada um desses anagramas é uma permutação simples da palavra SORTE, os elementos que compõem a palavra são sempre os mesmos, mas temos a troca de posições. Assim, podemos dizer que a permutação apresenta a característica de colocar em uma fila ordenada, um determinado número de objetos diferentes.

DEFINIÇÃO – Permutação simples

Permutação simples de n elementos distintos é todo agrupamento (conjunto) ordenado formado por esses n elementos. A palavra simples significa que cada agrupamento formado não haverá repetição de elementos.

O número de permutações simples de n elementos é dado por

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ ou } P_n = n!$$

Dando continuidade, vamos apresentar de imediato a permutação com elementos repetidos porque a permutação simples e o cálculo do fatorial ocorrem de mesmo modo e, em seguida, vamos propor a primeira lista de questões do curso.

A ideia da permutação com elementos repetidos é que quando estudamos uma palavra que possui uma ou mais letras repetidas, quando trocadas de lugar geram o mesmo anagrama e não um anagrama distinto. Em outras palavras, ao contar os anagramas de uma palavra, acabamos contado a mesma permutação simples várias vezes.

Para contornar esse excesso de resultados iguais, temos o seguinte resultado:

DEFINIÇÃO – Permutação com elementos repetidos.

O número de permutações de n elementos dos quais n_1 é de um tipo, n_2 é de outro e n_3 é de outro, com $n_1 + n_2 + n_3 = n$, é dado por:

$$P_n^{n_1,n_2,n_3} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$$

Em que n_1, n_2 e n_3 representam o número de vezes que certo elemento repete.

Começaremos resolvendo o primeiro exercício abaixo para mostrar o funcionamento da permutação na prática. Na sequência, daremos um tempo de 10 minutos para resolverem o segundo exercício, em que é necessário a fixação da letra A para assim realizar a permutação com os elementos que restaram.

Exercícios II

1- Quantos são os anagramas da palavra ARARA?
2- Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam com A?

Dependendo do tempo que ainda sobrar para o encontro, convidaremos um estudante para apresentar a resolução no quadro, caso contrário um estagiário vai corrigir.

9º Momento: Lista de atividades e correção. (30 min)

Preparamos a seguinte lista com quatro atividades para que os alunos possam resolver nos minutos que antecedem o término do encontro. Essas questões foram escolhidas porque cada uma possui uma forma diferente de apresentar um problema de permutação com repetições. Além disso, elas foram organizadas com base no nível de dificuldade, sendo a primeira questão um exercício, a segunda questão um problema e as duas últimas são problemas mais elaborados de vestibulares.

Daremos um tempo de 20 minutos para resolverem, enquanto observaremos o desempenho deles, orientando-os em caso de dúvidas com questionamentos e revisando os dados presentes no enunciado da atividade. Depois desse tempo, resolveremos no quadro essas questões e, caso não sobre tempo, vamos respondê-las no começo do próximo encontro.

Lista de atividades

1 – Quantos números de 5 algarismos podemos formar utilizando $\{1,2,2,2,4,3,3,5\}$?

2- O banco de Karina pede para que ela crie uma senha formada só por números, com 6 algarismos. Para construir essa senha de forma que ela não esqueça, Karina usará somente os algarismos existentes na data de nascimento do seu filho, sendo que ele nasceu no dia 24/08/20. Nessas condições, o número de senhas distintas que ela pode formar usando os 6 algarismos contidos na data de nascimento do seu filho é:

A) 120. B) 180. C) 360. D) 450. E) 720.

3- (**Enem Digital 2020**) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as 7 letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @.
O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras “edu” apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.
Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.
De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?
A) 59. B) 60. C) 118. D) 119. E) 120.

4 - (**UNIFESP-2006**) As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é?

A) PROVA.   B) VAPOR.   C) RAPOV.   D) ROVAP.   E) RAOPV.

Em caso de sobrar tempo, preparamos os seguintes exercícios que apresentaremos nos slides. Somente pediremos a sala que resolvam eles se houver tempo, caso contrário eles serão desconsiderados do encontro.

Exercícios extras

1)Quantos anagramas tem a palavra PARANÁ?

2)(**FGV-2003**) De quantas formas podemos permutar as letras da palavra ELOGIAR, de modo que as letras A e R fiquem juntas em qualquer ordem?

3)Durante um torneio intercolegial, o time vencedor conseguiu obter 6 vitórias, 3 empates e 1 derrota. De quantas maneiras distintas esses resultados podem ter acontecido.

A) 5040.   B) 2520.   C) 1260.   D) 840.   E) 630.

Avaliação:

Durante esse encontro a avaliação ocorrerá durante a aula, avaliaremos a interação da sala com nossas explicações e questionamentos, o conhecimento básico deles sobre esses conteúdos com a resolução dos exercícios e da lista de atividades. Se tratando do primeiro encontro, é esperado pouca interação, logo qualquer contribuição por parte dos estudantes será bem-vinda.

Referências:

BARROSO, Juliane Matsubara. *Matemática*: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2008. Vol. 2.

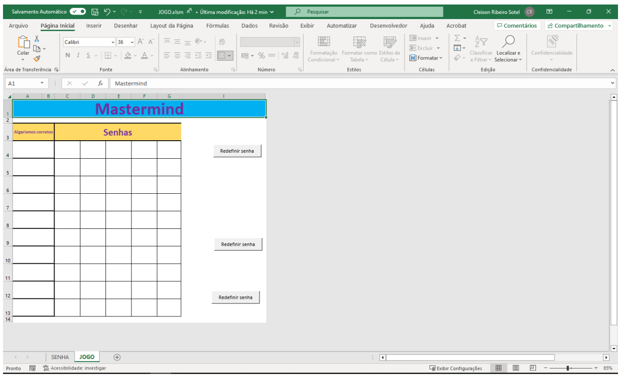
OLIVEIRA, Raul Rodrigo de. Exercícios sobre permutação simples. Brasil escola. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-permutacao-simples.htm#questao-11. Acesso em 09 mar. 2023.

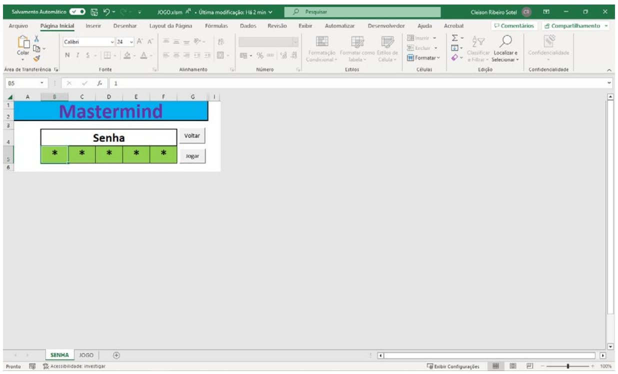
PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2009. Vol. 2.

SILVA, Jhon Lourenço da. *Aprendendo e se Divertindo com Combinatória*: uma proposta com uso do Jogo Master Mind para anos finais do Ensino Fundamental. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco – UFP, Caruaru, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/41812/1/SILVA%2c%20Jhon%20Louren%c3%a7o%20da.pdf. Acesso em: 12 fev. 2023.

Apêndices:

A)





3.1.1. **Relatório – 01/03/2023**

Relatório 1 - Sala A205

No dia onze de março de 2023, foi realizado o primeiro encontro do Promat. O tema da aula foi princípio fundamental da contagem e permutações. A aula teve início as, oito horas e quatro minutos.

Alguns alunos solicitaram para ir ao banheiro antes do início da aula, mas, por conta de reformas no bloco onde a aula estava ocorrendo, os banheiros próximos estavam interditados. Assim, os alunos tinham que se dirigir para os banheiros do outro bloco de salas, causando uma demora no retorno desses alunos.

Como todos os alunos em sala, iniciamos a aula, primeiramente apresentando o curso e comentando sobre o conteúdo a ser abordado. Para a apresentação inicial dos alunos e dos estagiários, utilizamos uma bola de aproximadamente 50cm de diâmetro, com a intenção de criar um clima de descontração, objetivando uma maior interação de todos. Esta apresentação ocorreu de maneira rápida, ocupando metade do tempo programado.

Após todos se apresentarem, dizendo o nome, cidade de onde veio, hobby e curso de graduação de desejo, anunciamos que iriamos fazer um jogo, que consistia em adivinhar a senha que uma dupla do grupo escolhesse. A dupla que criou a senha não poderia revelá-la para a dupla que adversária. Alguns grupos resolveram alternar entre as tentativas de adivinhação. A senha era composta por números de um a cinco, de modo que não repetisse algarismos entre eles. Preparamos este jogo no *Software Excel* [1], e como tínhamos dois notebooks prontos para o jogo, decidimos deixar dois grupos jogar diretamente no *Software*. Os demais grupos receberam uma folha contendo duas grades com cinco colunas e dez linhas para as tentativas e mais uma coluna para anotar quantos algarismos estavam posicionados corretamente. Os alunos entenderam muito rápido a dinâmica do jogo explicada pelos estagiários. Decidimos jogar de uma outra maneira que não havíamos previsto em plano de aula, o que foi possível já que a dinâmica de apresentação ocorreu de forma rápida.

[1] Excel é um programa informático desenvolvido e distribuído pela Microsoft Corp. Trata-se de um software que permite realizar tarefas contabilísticas e financeiras graças às suas aplicações para criar e trabalhar com folhas de cálculo.

Jogamos uma “partida” do jogo com a sala toda, o professor orientador criou a senha de modo que somente ele sabia esta, deixando armazenada na planilha usada para o jogo, e as tentativas eram ditadas pelos alunos, um estagiário preenchia no *Excel* a senha ditada, achamos que com a visualização facilitada na planilha de quantos algarismos estavam no lugar correto, os alunos conseguiram acertar a senha antes das dez tentativas limite. Logo abaixo podemos ver um grupo jogando.

Figura 2: Alunos jogando no *Excel* o jogo Mastermind adaptado.

Fonte: Autores (2023).

Após finalizarmos o jogo, explicamos a definição do princípio fundamental da contagem (PFC), utilizando alguns exemplos de aplicação do método de contagem bem como explicamos o porquê que este jogo pode gerar exatas 119 tentativas erradas para cada senha criada, utilizando o PFC. Logo em seguida os alunos foram liberados para o intervalo.

Após 20 minutos de intervalo, retornamos a aula, explicando e resolvendo mais um exemplo de aplicação direta do PFC. Seguimos relembrando o conceito de fatorial, com a explicação de dois casos especiais do fatorial que é o fatorial de um e de zero.

Seguimos propondo exercícios para os alunos praticarem. Um deles foi resolvido como exemplo e deixamos os demais para os alunos. Atendíamos os alunos conforme estes nos questionavam com dúvidas relativas a cálculo da divisão, subtração e soma com fatoriais. Corrigimos os exercícios após perceber que muitos já haviam feito.

Partimos para o conceito de permutação simples e permutação com repetição. Utilizamos como exemplo de permutação simples o jogo anterior, explicitando o método aplicado na contagem das senhas possíveis. Os alunos demostraram ter entendido a ideia após a explicação, com algumas explicações detalhadas em pequenos detalhes como por exemplo a notação de fatorial que não é usada no PFC e o uso de todos os elementos do conjunto a ser permutado.

Disponibilizamos um tempo para os alunos tentarem resolvem uma lista de atividades com questões de permutação e de PFC. Neste período, circulamos pela sala tirando dúvidas. Percebendo que muitos alunos já estavam finalizando os exercícios, resolvemos expor as respostas no quadro e, com o último exercício resolvido, encerramos a aula e nos despedimos da turma.

3.2. **Plano de aula – 2º Encontro 18 março 2023.**

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Arranjo, combinação e probabilidade.

Objetivo geral: Revisar as propriedades de arranjo, combinação e probabilidade. Praticar exercícios de fixação do conteúdo.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Compreender os conceitos de arranjo simples e combinação simples;
- compreender os conceitos de espaço amostral, eventos, probabilidade, probabilidade condicional e propriedades associadas;
- identificar situações do cotidiano para aplicação desses conceitos;
- resolver problemas e exercícios sobre o conteúdo estudado.

Tempo de execução: Uma aula com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook*, projetor multimídia, *Power Point*, caixa fechada, bolinhas pretas e brancas de isopor, folhas de papel sulfite.

Encaminhamento metodológico:

Realizaremos essa aula com auxílio do projetor presente na sala, projetando lâminas com definições, exemplos e outras informações referentes ao conteúdo. Os alunos serão organizados em grupos de quatro, mas com liberdade para se sentarem da maneira que preferirem.

O referencial metodológico que será adotado nesta aula será o da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que adquiriram no ensino básico, incentivando a pesquisa e o uso de diferentes métodos e estratégias de resolução.

Utilizaremos os problemas matemáticos de maneira diversificada, para iniciar determinado conteúdo ou para praticar. Entregaremos após o jogo inicial a folha impressa com o conteúdo programado para esse encontro.

1º Correção de atividades da aula passada (15 min)

Primeiramente, vamos realizar a correção das atividades que não foram corrigidas na aula anterior. Os alunos serão convidados a realizar a correção das duas primeiras atividades, já as outras duas questões serão deixadas para um estagiário.

2º Arranjo simples (35 min).

Na sequência, apresentaremos uma breve descrição do que é arranjo simples, a mesma descrição estará na folha entregue aos alunos. Explicaremos, usando as lâminas do *Power Point,* que um arranjo simples é um agrupamento (conjunto) formado dos p elementos distintos de um agrupamento maior.

DEFINIÇÃO – Arranjo simples: Dados os n elementos distintos do conjunto $D = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, chama-se **arranjo simples** de p elementos de D todo agrupamento (conjunto) formado por p elementos **distintos** de D com $p \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$. Sua fórmula usual é

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

A permutação simples é um caso particular do arranjo simples para quando $n = p$. Diferente da permutação, em que presenciávamos conjuntos com elementos trocados de posição, aqui consideramos conjuntos com elementos distintos.

Usaremos como exemplo o conjunto $D = \{1,2,3,4\}$ e representaremos todas as sequências possíveis de dois elementos distintos:

Seja o conjunto $D = \{1,2,3,4\}$, representaremos todas as sequências possíveis de dois elementos distintos pelos pares ordenados:

$$(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3).$$

E temos:

- $(1,2) \neq (2,1)$ por conta da **ordem**;
- $(1,2) \neq (1,3)$ por conta da **natureza** dos elementos (elementos distintos);

Utilizando o formato de arranjo ficaria:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

Mostraremos a generalização.

Generalizando para um conjunto $D = \{1,2,\dots,n\}$ com n elementos, e tomando elementos distintos n a p, obtemos a fórmula

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Cada um desses conjuntos é um arranjo simples dos dois elementos de D, tomados dois a dois. Nesse momento, faremos a observação de que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam pela **ordem** dos elementos ou pela **natureza** dos elementos que os formam.

Indicaremos o número de arranjos simples por $A_{4,2} = 12$. E esse número é calculado pelo PFC, fazendo $4 \cdot 3 = 12$, explicaremos de maneira separada para cada posição que os elementos do conjunto D podem ser posicionados.

Ao aplicarmos o conceito de fatorial, podemos escrever $A_{4,2}$ como $A_{4,2} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{2!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = \frac{4!}{2!}$. Portanto, o número de arranjos simples pode ser visto como

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!}.$$

Generalizando para um conjunto $D = 1,2,\dots,n$ com n elementos, e tomando elementos distintos n a p, obtemos a fórmula

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Finalizada a explicação, será apresentado o exemplo abaixo para auxiliar na fixação do conceito. Sua resolução será realizada em conjunto com a sala, com uma explicação detalhada, fazendo ligações com a definição do arranjo simples.

Exemplo 1:

1) Numa competição de programação, participam 10 programadores. A premiação é feita aos 2 (dois) primeiros colocados. De quantas maneiras a premiação pode ocorrer?

Resolução:

Neste caso, temos $n = 10$ e $p = 2$, ou seja, temos um conjunto de 10 elementos onde 2 deles serão premiados, na fórmula ficaria da seguinte maneira:

$$A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$$

Exemplo 2:

Qual é a quantidade de arranjos simples que podemos fazer utilizando 3 símbolos do conjunto {♠,♣,♥,♦, ☻}?

A) 10

B) 12

C) 15

D) 30

E) 60

Finalizado a correção dos exemplos, para finalizar esse foco em arranjo simples, vamos deixar que resolvam o seguinte problema do ENEM de 2020, escolhido por trabalhar diretamente com esse método de contagem. Daremos um tempo de 10 minutos para resolverem. Na sequência, um estagiário vai apresentar a solução no quadro.

Exercício I:

1) (ENEM – 2020) Um determinado campeonato de futebol, composto por 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor. Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a:

a) 64. b) 74. c) 254. d) 274. e) 634.

3º Definição de combinatória simples. (50 min)

Na sequência vamos começar o estudo da combinatória simples, explicando, por meio das lâminas do *Power Point,* que esse tipo de agrupamento se diferencia totalmente dos anteriores que levavam em consideração a ordem dos elementos em cada formação. Neste novo caso, a ordem dos elementos não é considerada.

Usaremos como exemplo as seguintes situações:

Situação 1: Quatro jogadores, A, B, C e D, são candidatos a ocuparem as duas vagas de atacantes do time de futebol da cidade para a disputa do campeonato regional.

Como todos são igualmente habilidosos nessa função, a escolha será feita por meio de um sorteio. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

Como todos são excelentes jogadores com o mesmo nível de habilidade e as funções são idênticas a ordem dos candidatos não é levada em conta, isto é, $\{A, D\} = \{D, A\}$.

Assim, o número de escolhas diferentes que podem ser realizadas é o número de subconjuntos de dois elementos do conjunto $T = \{A, B, C, D\}$, sendo

$$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}.$$

Esses subconjuntos são chamados “combinações simples dos quatro elementos de T, tomados dois a dois”, e denotado por $C_{4,2}$. Aqui vale observar que duas combinações simples se diferenciam pela **natureza** dos elementos (elementos distintos), e não pela ordem deles. A exemplo

- $\{A, B\} = \{B, A\}$, a **ordem** não altera o conjunto.
- $\{B, C\} \neq \{B, D\}$, a **natureza** altera o conjunto.

Modificando a mesma pergunta para se tornar um problema de arranjo simples, poderemos observar a relação entre esses dois agrupamentos.

Situação 2: Quatro jogadores A, B, C e D são candidatos a ocuparem as duas vagas distintas de atacante e zagueiro no time de futebol da cidade para a disputa do campeonato regional. Como todos são igualmente habilidosos nessas duas funções, a escolha será feita através de um sorteio. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?”

Suponhamos que o 1° sorteio fosse para a vaga de atacante e o 2° para zagueiro. Temos $A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$ possibilidades.

Sorteio		**Sorteio**		**Sorteio**		**Sorteio**		**Sorteio**		**Sorteio**	
1°	**2°**	**1°**	**2°**	**1°**	**2°**	**1°**	**2°**	**1°**	**2°**	**1°**	**2°**
A	B	A	C	A	D	B	C	B	D	C	D
B	A	C	A	D	A	C	B	D	B	D	C

Nesse momento, mostraremos aos alunos que os elementos que compõem cada escolha possível na situação 1 formam duas escolhas possíveis na situação 2, usando o conceito do fatorial, temos 1 combinação simples para cada 2! arranjos simples.

Logo, se multiplicarmos $C_{4,2}$ por 2! vamos ter $C_{4,2} \cdot .2! = A_{4,2}$, ou seja,

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!}$$

Generalizando o raciocínio para os números naturais n e p, com $n \geq p$, obtemos a fórmula

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Definição – Combinação simples

Dados os n elementos distintos do conjunto $T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, chama-se combinação simples de p elementos de T todo agrupamento (conjunto) de T formado por p elementos com $n, p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$. Sua fórmula usual é

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Diferente do arranjo simples e da permutação simples, esse agrupamento não considera a ordem dos elementos, apenas se eles possuem elementos distintos.

Em seguida, para fixação, vamos aplicar os dois exercícios descritos abaixo, num período de até 15 minutos.

Os estagiários percorrerão a sala tirando dúvidas através de questionamentos como: “A ordem de escolha dos elementos é importante? Se não for, qual é o tipo de agrupamento?”, “O exercício exige que faça apenas uma combinação?”, etc. Esses exercícios foram retirados do livro Matemática Paiva (2009, Vol. 2 e p. 181). Foram escolhidos por não serem complicados e o segundo deles usar do PFC.

Exercícios II:

1- Entre oito policiais serão escolhidos cinco para garantir a segurança pessoal de um senador da República durante um evento. Quantos grupos de segurança diferentes podem ser formados se os escolhidos terão funções idênticas?

R: Como as funções são idênticas, a ordem dos elementos não altera o grupo de segurança, logo cada grupo é uma possível combinação. O número total de combinações é

$$C_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!\,5!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3!\,5!} = 8 \cdot 7 = 56.$$

2- Dispondo de cinco modelos homens e seis mulheres, pretende-se escolher um grupo de três homens e quatro mulheres para um desfile de moda. De quantos modos diferentes o grupo pode ser formado?

R: Devem ser escolhidos três homens entre cinco e quatro mulheres entre seis. Usando o Princípio Fundamental da Contagem, o número de grupos diferentes que podem ser formados é dado pelo produto $C_{5,3} \cdot C_{6,4}$.

$$C_{5,3} \cdot C_{6,4} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} \cdot \frac{6!}{4!\,(6-4)!}$$

$$\frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!\,3!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!\,4!} = 10 \cdot 15 = 150$$

Caso possível, a correção será feita antes do intervalo. Um dos estagiários apresentará as resoluções no quadro. Se houver tempo, convidaremos dois alunos para irem ao quadro apresentar as respostas.

4º Intervalo (20 min)

5º Diferença entre agrupamentos. (10 min)

Voltando do intervalo, antes de adentrar na área da Probabilidade, definiremos os critérios para diferenciar problemas de arranjo e combinação. Será dedicado um tempo de 10 minutos para esse momento.

Critério para diferenciar permutação, arranjo e combinação

Para identificar o tipo de agrupamento estudado, tome dois possíveis agrupamentos sugeridos pelo problema, com pelo menos dois elementos distintos cada.

Arranjo simples: Com a mudança de posição, obtemos dois agrupamentos diferentes dos originais, e podemos ter agrupamentos com elementos diferentes.

Permutação simples: Com a mudança de posição, obtemos dois agrupamentos diferentes dos originais, e esses agrupamentos possuem todos os elementos do conjunto estudado $(p = n)$.

Combinação simples: Com a mudança de posição, obtemos dois agrupamentos iguais aos originais.

Exibiremos os exemplos abaixo para que os alunos classifiquem os agrupamentos nos três tipos:

“Escolher seis dos sessenta números para uma aposta de um jogo”

R: Combinação

“Indicar possíveis classificações dos quatro primeiros colocados no Campeonato Brasileiro de Futebol”

R: Permutação.

“Eleger uma comissão de dois alunos em que um será o porta-voz da classe, e o outro será o secretário.”

R: Arranjo.

6º Introdução a probabilidade (60 min)

Para introduzir o conceito de probabilidade, vamos realizar uma simulação do jogo da megasena, onde cada aluno terá que selecionar seis números entre 1 e 60, anotando-os em uma cartela. Explicaremos que será sorteado 6 números de modo aleatório entre 1 e 60 e o aluno que acertar os seis ganhará 100 reais como prêmio.

Nos certificaremos de que todos tenham marcado 6 números na cartela antes de começarmos a sortear, pedindo para que anotem em duas cartelas o nome e os números, e devolvendo uma delas para nós.

Após o jogo ser realizado, com ou sem ganhadores, explicaremos o cálculo da probabilidade de alguém acertar os números sorteados. O cálculo é feito da seguinte maneira:

O número de elementos nesse caso é dado por:

$$C_{60,6} = \frac{60!}{(60-6)!6!} = \frac{60!}{54!6!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54!}{54!6!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 50.063.860$$

O evento de interesse E é uma das combinações possíveis, pois é sorteado seis números no jogo.

Assim a probabilidade de ganhar é de $P(E) = \frac{1}{50063860} = 0{,}00000002$, que é equivalente a dizer que temos $0{,}000002\%$ de chances de ganhar.

Explicaremos que em nosso cotidiano, usamos a Teoria das Probabilidades como ferramenta para medir as possibilidades de **experimentos aleatórios** como, por exemplo, a do meteorologista em prever o clima, a de um candidato ponderar as possibilidades de se eleger, a chance de sair determinada carta em um jogo de baralho etc. Para cada experimento temos um conjunto com todos os possíveis resultados, chamado espaço amostral. Um subconjunto qualquer do espaço amostral é chamado de evento.

Apresentaremos então as seguintes definições:

Definição – Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso é chamado de experimento aleatório.

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral desse experimento. Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento.

Exemplo

Experimento: Lançamento de um dado; Espaço amostral: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

Evento: Sair um número menor que 4, $E = \{1,2,3\}$.

Dizemos que um espaço amostral é equiprovável quando todos os resultados do experimento têm a mesma chance de ocorrer (lançamento de dados viciados não é equiprovável).

E assim como nessa situação da megasena, explicaremos que podemos medir a chance de uma pessoa acertar os seis números sorteados (evento de interesse).

Essas medições podem ser expressas em forma fracionária, decimal ou percentual e são chamadas de probabilidades de um evento ocorrer.

Definição – Probabilidade.

Sejam A um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio, e E um evento de A. A probabilidade de ocorrer algum elemento de E é indicada por $P(E)$ e definida por:

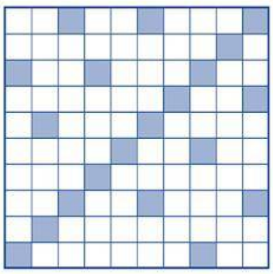
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(A)}$$

em que $n(A)$ e $n(E)$ indicam, respectivamente, o número de elementos de A e E.

No quadro, explicaremos que cada fração se refere a medição da probabilidade de um evento. No próximo momento, deixaremos um exercício de probabilidade para os alunos praticarem. Esses foram escolhidos do livro Matemática Paiva (2009, Vol. 2 e p. 267) por usarem apenas a definição de probabilidade. Esse exercício estará na folha impressa e os estudantes vão dispor de 15 minutos antes de começarmos a correção no quadro.

Exercícios III:

1) (UFPB - 2006) Na figura abaixo, está representada uma região do plano limitada por um quadrado de 5 cm de lado. A região foi totalmente subdividida em pequenos quadrados de 0,5 cm de lado, alguns dos quais foram sombreados.



Fonte: Universidade Federal da Paraíba.

Se um dos pequenos quadrados for selecionado ao acaso, a probabilidade de ele ser sombreado é:

A) $\frac{1}{3}$. B) $\frac{4}{5}$. C) $\frac{2}{3}$. D) $\frac{1}{5}$. E) $\frac{3}{4}$.

7º Lista de atividades. (30 min)

Neste momento iremos apresentar uma lista de exercícios para fixação de conteúdo, conforme os alunos mostrarem interessados em apresentar a sua solução, pediremos para que vá até a lousa para expor, caso não haja interesse corrigiremos junto com eles no quadro ou no slide conforme tivermos tempo.

1) (VUNESP 2019) Em uma sala de aula com 28 alunos, um grupo com 3 alunos será aleatoriamente escolhido, para participar de uma reunião com a direção da escola. O número total de grupos distintos que poderá decorrer dessa escolha, é igual a:

a) 19 956

b) 14 892

c) 9 828

d) 6 552

e) 3 276

2) Na busca de incentivar os estudantes da escola a participarem do evento de Halloween, um colégio decidiu sortear 3 prêmios para 10 estudantes que estiverem com as melhores fantasias, sendo os prêmios: uma bicicleta, um smartphone e um tablet. O número de maneiras distintas que podemos ter o resultado desse sorteio é:

a) 120
b) 250
c) 360
d) 720
e) 1480

3) (ENEM 2015) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) $\frac{1}{100}$
b) $\frac{19}{100}$
c) $\frac{20}{100}$
d) $\frac{21}{100}$
e) $\frac{80}{100}$

4) (ENEM 2010 2ª aplicação) Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves. Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?

a) 63,31%
b) 60,18%
c) 56,52%
d) 49,96%
e) 43,27%

Daremos um tempo de 20 minutos para que os alunos resolvam essas questões. Conforme observarmos que algum aluno já terminou, faremos o convite para ele ir ao quadro escrever sua solução. Caso faltar tempo, nós assumiremos a resolução ou deixaremos para início da próxima aula.

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou no quadro negro.

Referências:

BARROSO, Juliane Matsubara. *Matemática*: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2008. Vol. 2.

ENEM 2009 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 18 fev. 2023.

ENEM 2015 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 21 fev. 2023.

ENEM 2016 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 21 fev. 2023.

ENEM 2020 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 18 fev. 2023.

PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2013. Ed. 2. Vol. 2.

PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2009. Vol. 2.

QCONCURSOS, Questões de Concursos. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/079c999e-b7. Acesso em 21 fev. 2023.

3.2.1. **Relatório – 18/03/2023**

Relatório 2 - Sala A205

No dia dezoito de março de 2022, foi realizado o segundo encontro do Promat. O tema da aula foi: arranjo, combinação e probabilidade, com início as oito horas da manhã. A aula começou com a introdução do conceito de arranjo e na segunda parte antes do intervalo foi apresentado o conceito de combinação. Os estagiários utilizaram o computador e o projetor multimídia para apresentar o conteúdo, por meio de lâminas.

Foi entregue aos alunos duas folhas com definições, exemplos e exercícios que foram apresentados durante o encontro. Solicitou-se o número de telefone de alunos que tivessem interesse em fazer parte de um grupo do *whatsapp*, a ser utilizado para fazer avisos e disponibilizar os materiais das aulas. Nesse dia, estiveram presentes 23 alunos, com três deles vindo pela primeira vez ao Promat.

A sala foi organizada para que os alunos se sentassem em grupos de quatro integrantes. No entanto, alguns deles preferiram permanecer sozinhos, não havendo insistência por parte de nós estagiários para que esses se agrupassem. Na primeira parte da aula os conceitos foram introduzidos sempre intercalando a apresentação de definições, exemplos e exercícios, sendo disponibilizado aos alunos alguns minutos para resolução desses exercícios. Percorremos as mesas oferecendo ajuda ou algum esclarecimento aos alunos, cuja oferta era prontamente aceita por muitos deles.

Ajudávamos na interpretação dos exercícios e a compreender por que se fazia necessário utilizar uma fórmula apropriada para cada problema. Notamos um aluno que estava bastante adiantado em relação aos demais, porque durante o momento das explanações das fórmulas e dos exercícios, ele já estava resolvendo os problemas do próximo assunto. Isso fez com que ele terminasse todo o conteúdo programado uma hora mais cedo do que o resto da turma. Ele também foi um dos alunos que mais nos chamou para confirmar se suas respostas estavam corretas.

Na segunda parte da aula, após o intervalo para o lanche, propusemos aos alunos um jogo de loteria com o objetivo de introduzir o conceito de probabilidade. Para incentivar os alunos foi proposto “um *pix* para o aluno mais sortudo da turma”. Foi distribuído aos alunos duas cartelas com 60 números, dos quais eles deveriam selecionar seis e marcar nas duas cartelas, sendo uma para comprovar o jogo que havia feito caso ganhasse. De início os alunos se mostraram descrentes que ganhariam. Acreditamos que isso aconteceu porque eles já tinham uma ideia de que as chances de qualquer um deles ganhar seria muito pequena, mesmo assim todos participaram. Dos seis números sorteados, apenas um aluno, acertou somente um número. A aula foi finalizada com uma lista de exercícios com quatro questões, envolvendo os conceitos apresentados naquele dia.

Novamente ajudamos os alunos nas resoluções. Notamos que todos os alunos conseguiram resolver todas as questões, e com sobra de tempo. Por este motivo, propusemos uma questão desafio, mas os alunos estavam dispersos por ser praticamente hora de ir embora e acabaram não dando muita atenção a esta questão. Acreditamos que os objetivos foram alcançados, pois respondemos a todas as dúvidas que eles nos trouxeram. A maioria dos alunos estava disposta a questionar os estagiários, sem se sentirem constrangidos. Aqueles alunos que não pediram ajuda mostraram que fizeram as atividades propostas.

3.3. **Plano de aula – 3º Encontro 25 março de 2022.**

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Geometria analítica.

Objetivo geral: Introduzir conceitos importantes da geometria analítica como ponto, reta, plano, entre outros. Além de revisar o conceito de plano cartesiano, distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento qualquer nesse plano.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Conhecer o surgimento da geometria analítica e sua importância na vida cotidiana;
- Compreender o conceito de plano cartesiano, seus elementos e aplicabilidade;
- Entender o cálculo da distância entre dois pontos quaisquer no plano cartesiano e a realizar a aplicação da fórmula;
- Compreender o conceito de ponto médio de um segmento qualquer no plano cartesiano e como calculá-lo;
- Resolver diferentes problemas que empregam esses conteúdos.

Tempo de execução: Uma aula com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook*, projetor multimídia, *Power Point*, folhas de papel sulfite.

Encaminhamento metodológico:

Realizaremos essa aula com auxílio do projetor presente na sala, projetando lâminas com definições, exemplos e outras informações referentes ao conteúdo. Os alunos serão organizados em grupos de quatro, mas com liberdade para se sentarem da maneira que preferirem.

O referencial metodológico que será adotado nesta aula será o da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que adquiriram no ensino básico, incentivando a pesquisa e o uso de diferentes métodos e estratégias de resolução.

Utilizaremos os problemas matemáticos de maneira diversificada, para iniciar determinando conteúdo ou para praticar. Será disponibilizado uma folha para cada aluno contendo exercícios, definições e explicações sobre os conceitos que serão trabalhados em aula.

1º Correção de atividades da aula passada (10 min, até 08:10).

Iniciaremos corrigindo os exercícios que ficaram sem correção na aula anterior. Na sequência, iniciaremos o estudo da geometria analítica.

2º Introdução a geometria analítica de Descartes (15 min, até 08:25).

Pediremos aos alunos que pensem na seguinte situação: “Um motorista dirigindo em uma viajem de férias, sofre um acidente em uma rodovia ainda longe da cidade. Um caminhoneiro que vinha logo atrás liga para o SAMU (192) pedindo ajuda. O atendente pergunta:

– Em que local da rodovia ocorreu o acidente?

E o motorista responde:

– Na rodovia BR-163, a exatos 163 km.”

Fonte: https://www.canalrural.com.br/mato-grosso/exemplo-nacional-concessao-da-br-163-deve-ter-contrato-assinado-em-janeiro/

Esse é um exemplo de situação em que usamos um sistema de coordenadas para indicar determinado local. Existem diversas outras situações cotidianas que se faz preciso um sistema de coordenadas como, por exemplo:

- Ao enviar uma carta, devemos escrever no envelope algumas informações necessárias para localização do destinatário;
- Um local na superfície da Terra é determinado pelas duas coordenadas: a longitude e a latitude;

- Um ponto do espaço aéreo é determinado por três coordenadas: a longitude, a latitude e a altitude;

Convidaremos os estudantes a pensarem em algum exemplo de situação do cotidiano em que se utiliza um sistema de coordenas. Espera-se ouvir exemplos como o GPS ou aplicativos de viagem como o Uber. Pensando em um plano no espaço, o sistema de coordenadas mais utilizados é o sistema cartesiano ortogonal de coordenadas introduzido por René Descartes.

Origem da geometria analítica

Concebida pelo matemático francês René Descartes $(1596 - 1650)$ em seu livro *La Géometrie* (1637), a Geometria Analítica é o ramo da matemática responsável por unir a Geometria euclidiana com a Álgebra, possibilitando a representação de figuras geométricas por meio de pares ordenados, equações ou inequações.

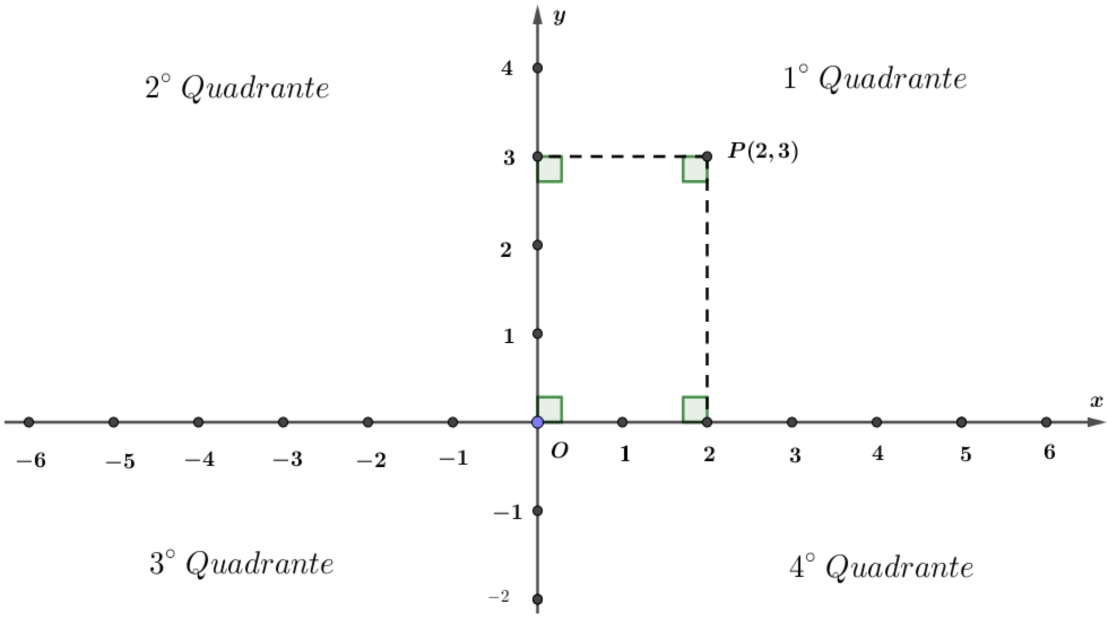
Essas representações ocorrem no plano cartesiano, formado por duas retas x e y perpendiculares, em que cada ponto das retas representa um número real ($\mathbb{R}$) e os pontos desse plano são formados pelos pares ordenados (x, y).

Fonte: https://www.todamateria.com.br/descartes/

Nesse momento, relembraremos brevemente os estudantes de elementos importantes sobre o plano cartesiano como pontos, eixo das abscissas, eixo das ordenadas, quadrantes e como representar graficamente um ponto nesse plano. Assim, poderão praticar todos esses conceitos depois com a atividade lúdica a ser proposta posteriormente.

Definição – Plano Cartesiano ortogonal de coordenadas.

Denominamos de plano cartesiano, o sistema de coordenadas num plano formado por dois eixos x e y perpendiculares entre si no ponto O (Origem). Para determinar as coordenadas do ponto P da figura abaixo, traçamos por P as perpendiculares aos dois eixos, obtendo as coordenadas desse ponto no eixo x e no eixo y, respectivamente.



Fonte: Autores (2023).

Na figura, as coordenadas de P são: a abscissa (ou coordenada em x) 2 e a ordenada (ou coordenada em y) 3. A representação $(2{,}3)$ é chamada de "**par ordenado** de abscissa 2 e ordenada 3". Em cada quadrante, um ponto vai possuir uma, e somente uma, das seguintes propriedades:

$$P(x, y) \in\ 1^\circ\ Quadrante\ \leftrightarrow x > 0\ e\ y > 0;$$
$$P(x, y) \in\ 2^\circ\ Quadrante\ \leftrightarrow x < 0\ e\ y > 0;$$
$$P(x, y) \in\ 3^\circ\ Quadrante\ \leftrightarrow x < 0\ e\ y < 0;$$
$$P(x, y) \in\ 4^\circ\ Quadrante\ \leftrightarrow x > 0\ e\ y < 0.$$

Usaremos uma lâmina do Power Point para representar o plano cartesiano e comentar cada um desses elementos. Neste momento é importante explicar o significado de par ordenado e que sua ordem é primeiro a coordenada em x e depois a coordenada em y. Aproveitaremos a lâmina para apontar alguns pontos no plano cartesiano, perguntando a sala se alguém poderia dizer como se chama esse ponto e como representá-lo.

3º **Jogo de Batalha Naval como introdução à Geometria Analítica (50 min, até 09:15).**

Em seguida, aproveitando que todos os alunos estarão em grupos de quatro pessoas, pediremos que formem duplas com o colega sentado a frente porque eles jogarão Batalha Naval. Explicaremos as regras do jogo usando *slides* e entregaremos as folhas impressas para todos. Aqueles que não quiserem participar, não serão obrigados. Os integrantes das duplas deverão se sentar de costas para o seu adversário, de modo a evitar que vejam as posições dos navios do adversário.

Dentre os jogos conhecidos que trabalham a noção de plano cartesiano, esse foi escolhido por abordar a relação biunívoca entre ponto do plano com seu respectivo par ordenado. As coordenadas foram modificadas para usarem apenas números ao invés de letras.

Nosso grupo utilizará o mesmo material usado na Regência na Escola Olinda Truffa de Carvalho em 2022, onde realizamos estágio com as turmas do 3° ano A e B. O conteúdo abordado com essas duas turmas foi justamente o de geometria analítica, com uma das atividades sendo a Batalha Naval. Trabalharemos com grelhas de dimensões 10x10, apresentando um espaço suficiente para organizarem os navios como quiserem.

Dinâmica do jogo

A grelha de batalha (Apêndice C) terá dimensão 10x10, sendo preciso demarcar em cada célula, seja na horizontal ou vertical, as seguintes letras que representam os respectivos navios.

1- Porta Aviões

P	P	P
	P	
	P	

2- Navios com 4 canhões

N4	N4	N4	N4

N4	N4	N4	N4

3- Navios com 3 canhões;

N3	N3	N3

N3	N3	N3

N3	N3	N3

4- Navios com 2 canhões;

N2	N2

N2	N2

N2	N2

N2	N2

5- Navios com 1 canhão

N1	N1	N1	N1	N1

Instruções

Cada jogador receberá uma folha impressa com uma grelha de defesa, uma grelha de ataque e os navios que poderão ser usados. Depois que os jogadores posicionarem seus navios na grelha de defesa, vai começar aquele que for o mais velho da dupla, escolhendo uma posição aleatória na sua grelha de ataque.

Por exemplo, suponha que o jogador mais velho escola atirar no ponto $(5, 1)$ em sua grelha de ataque, ele poderá dizer “Tiro em abscissa 5 e ordenada 1” ou “Tiro no ponto 5 e 1”. Todo jogador terá direito a fazer três tiros antes de passar a vez para o adversário, e após cada tiro, o adversário deverá informar se o tiro acertou ou não.

Se o tiro acertar parte de um navio, o adversário deve dizer “FOGO”. Se o quadradinho estiver vazio, ele deverá dizer “ÁGUA” e se o navio foi afundado deverá dizer “AFUNDOU”. O adversário também deverá informar que tipo de navio foi acertado.

O jogador deve marcar com um círculo em sua grelha de ataque se o local for “ÁGUA”, com a letra “x” se o local for “FOGO” e colorir todas as células que representam uma embarcação afundada. Ganha aquele que conseguir afundar a maior quantidade de navios do adversário primeiro ou acertar o maior número de tiros.

Prêmio

Dependendo do tempo, deixaremos que joguem apenas uma partida. Grupos que terminaram rapidamente a sua partida receberão novas grelhas caso queiram jogar novamente. Para incentivar a participação dos estudantes, entregaremos um bombom para cada vencedor da rodada, mas depois vamos distribuir um bis para todos os alunos como forma de agradecimento por participarem da atividade.

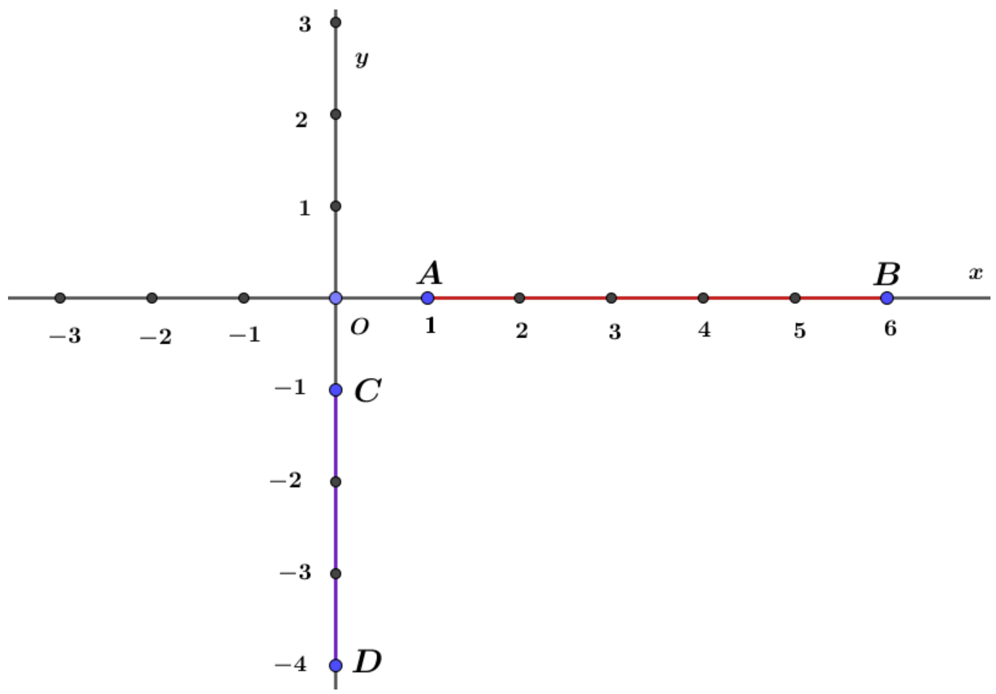
4º Definição da distância entre dois pontos. (25 min, até 09:40)

Antes do intervalo, vamos definir a distância entre dois pontos no plano cartesiano. Desenharemos no quadro um plano cartesiano com alguns pontos semelhante à figura abaixo para que alunos digam qual a distância entre eles.

Estabelecendo uma unidade de medida u nos eixos, diremos que a distância entre os pontos A e B é 5, ou que o comprimento do segmento $\overline{AB}$ é igual a 5.

Explicaremos que a rigor essa distância é calculada pelo módulo da diferença entre esses números, sendo $AB = |6 - 1| = 5$ ou $AB = |1 - 6| = 5$, ou simplesmente, o maior número menos o menor número, $AB = 6 - 1 = 5$. Por estarmos trabalhando com distâncias, elas devem ser sempre positivas, por isso trabalhamos com o módulo de um número.

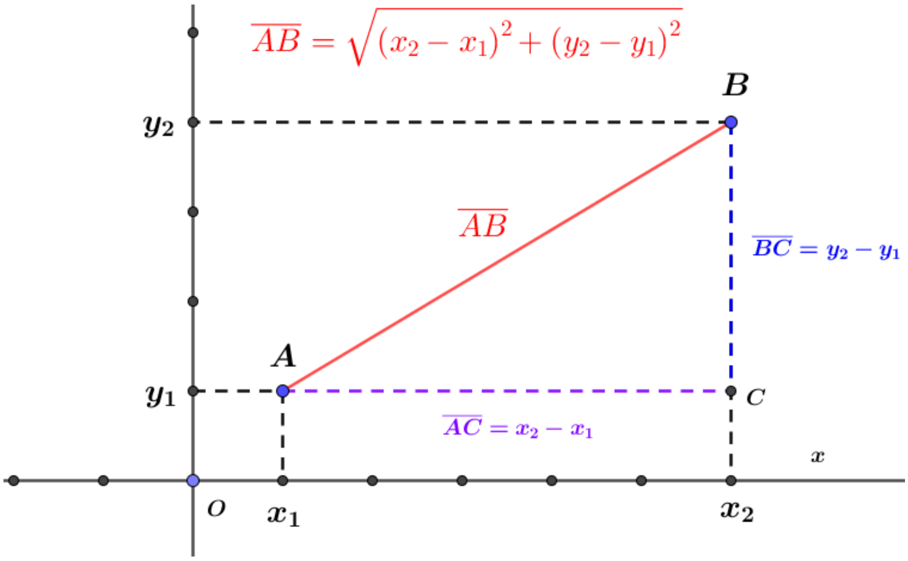
Figura 3: Representação de distância entre dois pontos.



Fonte: Autores (2023).

Diremos que não é necessário utilizar o modulo, basta fazer a diferença entre o maior e o menor número. Em seguida, vamos desenhar dois como pontos como os da figura abaixo e perguntaremos aos alunos como poderíamos calcular essa distância.

Figura 4: Representação ponto distância entre dois pontos genéricos.



Fonte: Autores (2023).

Queremos que percebam o triângulo retângulo ABC formado pelos três pontos, e que podemos determinar os comprimentos dos dois catetos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Conhecendo o comprimento dos catetos, basta utilizar o Teorema de Pitágoras.

5º Intervalo (20 min, até 10:00)

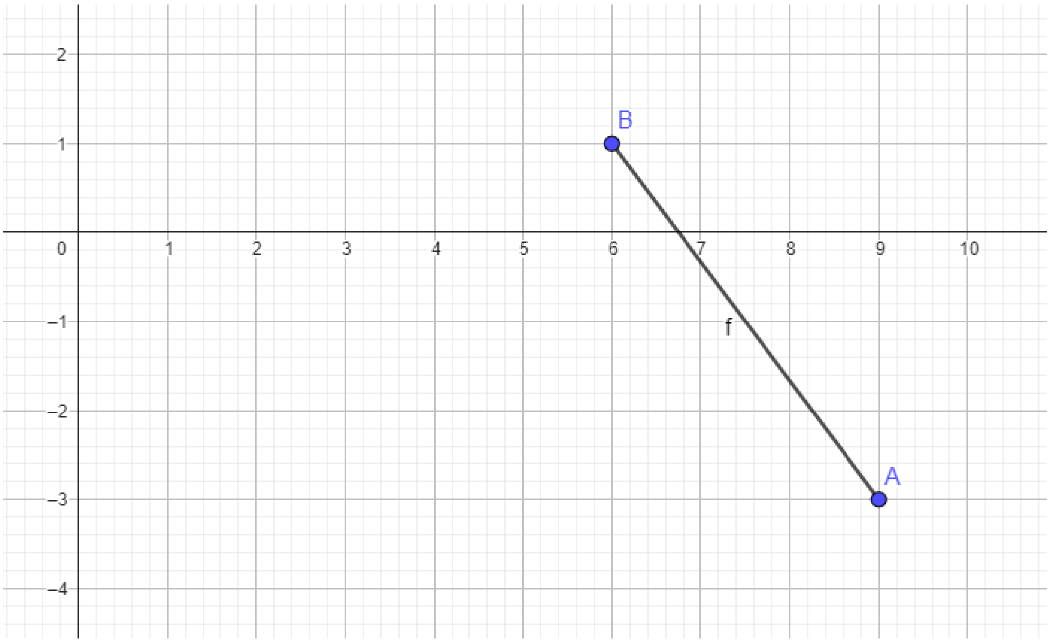
6º Lista de atividades sobre distância entre pontos. (40 min, até 10:40)

Com o objetivo de ajudar os alunos a compreender os conceitos apresentados antes do intervalo, vamos fazer um exemplo sobre distância entre dois pontos, como este abaixo.

Exemplo:

Calcule a distância entre os pontos A e B, sabendo que suas coordenadas são $A(9, -3)$ e $B(6, 1)$.

Figura 5: Representação gráfica de dois pontos.



Fonte: Autores (2023).

$$dAB = \sqrt{(9-6)^2 + (-3-1)^2}$$

$$dAB = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$$

$$dAB = \sqrt{9 + 16}$$

$$dAB = \sqrt{25} = 5\,u.$$

Na sequência, vamos apresentar uma lista de atividades de aplicação do conceito, a qual iremos solicitar que os alunos que se sentirem confortáveis apresente a sua resolução no quadro. Essas questões foram escolhidas por abordarem a distância entre dois pontos de três formas distintas. Daremos um tempo de 25 minutos para resolverem essas questões. Os estagiários percorrerão a sala de aula atendendo eventuais dúvidas.

Lista de atividades I:

1) Calcule a distância entre os pontos A e B, sabendo que suas coordenadas são $A(1,5)$ e $B(-5,-3)$.

2) (UFRGS) Se um ponto P do eixo das abscissas é equidistante dos pontos $A(1,4)$ e $B(-6,3)$, a abscissa de P vale:

a) -2. b) -1. c) 0. d) 1. e) 3.

3) (UFRGS) A distância entre os pontos $A(-2,y)$ e $B(6,7)$ é 10. O valor de y é:

a) -1. b) 0. c) 1 ou 13. d) -1 ou 10. e) 2 ou 12.

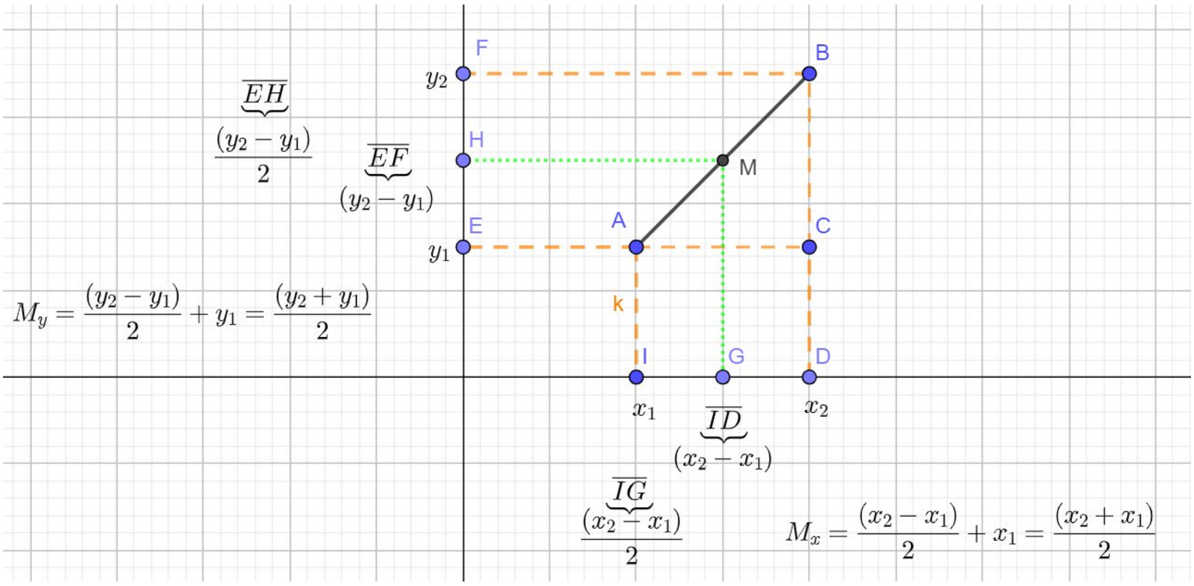
7º Definição de Ponto médio entre dois pontos. (30 min, até 11:10)

Em seguida, apresentaremos o conceito de ponto médio de um segmento no plano cartesiano. Mostraremos aos alunos como desenvolver a construção da fórmula que determina esse ponto.

Desenhando um plano cartesiano no quadro e utilizando um segmento de reta qualquer $\overline{AB}$ nesse plano, explicaremos que nosso objetivo será de obter um terceiro ponto M que pertence a esse segmento e que tem a propriedade de estar a uma mesma distância das extremidades A e B, como mostra a figura 5.

Será apresentado as coordenadas x e y do ponto médio como sendo, Mx e My em lousa da seguinte forma:

Figura 6: Ilustração fórmula do ponto médio.



Fonte: Autores (2023).

Desta forma, as coordenadas do ponto médio serão dadas por $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Definição – Ponto Médio

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ tal que $A(x_1\,, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são pontos distintos, denominamos de M o ponto médio de $\overline{AB}$. Podemos determinar suas coordenadas por

$$M(M_x, M_y)$$

$$M_x = \frac{x_2+x_1}{2} \qquad M_y = \frac{y_2+y_1}{2}$$

Para melhorar a compreensão do conteúdo, vamos apresentar um exemplo simples de aplicação da fórmula antes de darmos uma lista de exercícios.

Exemplo:

1) Determine as coordenadas do ponto médio entre os pontos: $A(3, -2)$ e $B(-1, -6)$;

$$M(M_x, M_y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$Mx = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$Mx = \frac{3 + (-6)}{2}$$

$$Mx = \frac{3 - 6}{2}$$

$$Mx = \frac{-3}{2} = -1{,}5$$

$$My = \frac{-2 + (-6)}{2}$$

$$My = \frac{-2 - 6}{2}$$

$$My = \frac{-8}{2} = -4$$

Logo, $M(-1.5, -4)$.

Daremos os dois seguintes exercícios para calcularem pontos médios, como forma de praticarem esse conceito antes da lista de atividades e se familiarizarem com a formula. Essas questões foram retiradas do livro Matemática Paiva (2013, Ed. 3, Vol. 3, p. 41).

Exercícios

Encontre o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $A(4{,}6)$ e $B(8{,}10)$.

b) $A(-3{,}1)$ e $B(5, -7)$.

8º Lista final de atividades. (30min, até 11:40)

Para finalizar a aula, vamos apresentar a lista de atividades abaixo para fixação do conteúdo, contendo alguns exercícios e problemas que exigem um pouco mais de atenção e conhecimento do conteúdo. Convidaremos os alunos que se sentirem confortáveis para expor a sua resolução no quadro.

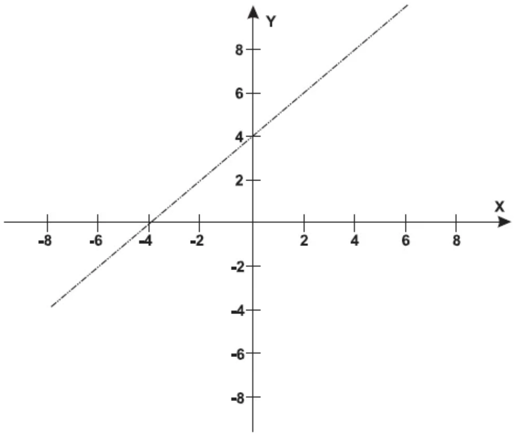
Lista de atividades II

1) Determine as coordenadas do ponto médio entre os pontos: $A(3, -2)\ e\ B(-1, -6)$;

2) Se um ponto A de um segmento $\overline{AB}$ ter coordenadas $A(-4{,}3)$ e o ponto médio for $M_{AB}(3, -1)$, ache as coordenadas do ponto B.

3) Uma das extremidades de um segmento de reta é o ponto $A(22, 22)$. Sabendo que $M(3, 22)$ é o ponto médio desse segmento de reta, calcule as coordenadas do ponto $B(x, y)$, que é a outra extremidade do segmento de reta.

4)(ENEM 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



Fonte: Exame Nacional do Ensino Médio (2011)

A reta de equação y = x + 4 representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P = (-5, 5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto.

a)$(-5,0)$. b)$(-3,1)$. c)$(-2,1)$. d)$(0,4)$. e)$(2,6)$.

5) (ESA) Dados três pontos colineares $A(x, 8)$, $B(-3, y)$ e $M(3, 5)$, determine o valor de $x + y$, sabendo que M é ponto médio de $\overline{AB}$.

a) 3 b) 11 c) 9 d) $-2{,}5$ e) 5

Como atividade extra no caso de terminarem essas últimas questões preparamos o seguinte exercício de ponto médio.

Exercício extra

(Unimontes) Considere $a \in IR$, com $a > 1$. Se $M(1,3)$ é o ponto médio do segmento de reta de extremidades $A(a, 4)$ e $B(-1,2)$, então o valor de a é

a) 2. b) 3. c) 4. d) 5.

R:

$$M(1,3) = \left(\frac{a-1}{2}, \frac{4+2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$1 = \frac{a-1}{2} \Rightarrow \mathbf{2} = \boldsymbol{a} - \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{3}$$

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou no quadro negro.

Referências:

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto & aplicações: 3° série: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

ENEM 2011 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 23 mar. 2023.

Ponto Médio e Baricentro. Projeto Agatha, 2023. Disponível em: https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-vestibular/matematica/geometria-analitica/ponto-medio-e-baricentro.php. Acesso em: 27 de fev. de 2023.

PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2013. Ed. 3. Vol. 3.

PETROPOLI, Viviane. Exemplo nacional, concessão da BR-163 deve ter contrato assinado em janeiro. Canal Rural. 2022. Disponível em: https://www.canalrural.com.br/mato-grosso/exemplo-nacional-concessao-da-br-163-deve-ter-contrato-assinado-em-janeiro/. Acesso em: 24 mar. 2023.

3.3.1. **Relatório – 25/03/2023**

Relatório 3 - Sala A205

No dia vinte de março de 2023, foi realizado o terceiro encontro do Promat, contando com a presença de 20 alunos. O tema da aula foi geometria analítica. A manhã fazia sol, com previsão de chuva para o período da tarde. A aula teve início as oito horas e sete minutos.

Esta aula foi iniciada relembrando brevemente o conteúdo trabalhado no sábado anterior, que foi sobre métodos de contagem. Feito isso, partimos para a apresentação dos fundamentos da geometria analítica, falando sobre algumas aplicações, por exemplo, uso de coordenadas na localização de um trecho de uma rodovia, para localização de uma casa em uma cidade, e uso de longitude, latitude e altitude na localização de aviões.

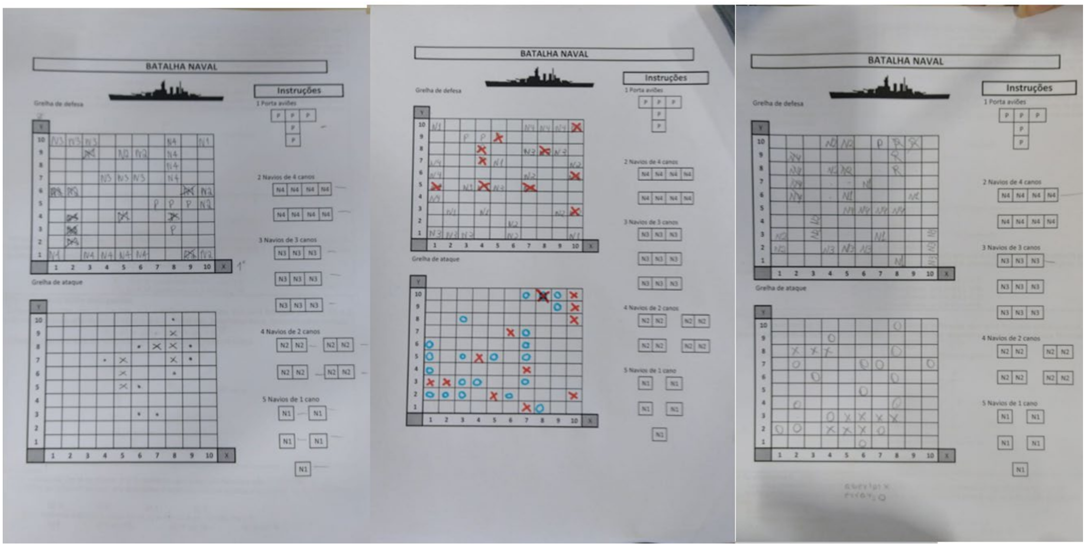
Após essa introdução, partimos para a introdução do conceito de plano cartesiano que é a base da geometria analítica, explicando que este foi criado por Rene Descartes. Caracterizamos o plano cartesiano, mostrando detalhadamente elementos importantes como as posições dos eixos, ângulos entre eles e seus nomes. Apresentamos também o conceito de par ordenado, ponto de origem e quadrantes. Sem manifestações de dúvidas por parte dos alunos, seguimos para o próximo momento da aula.

Para fixar os conceitos apresentados, realizamos um jogo de batalha naval modificado para que fosse trabalhado a ideia de um sistema de coordenadas. Criamos cada tabela para o jogo com o auxílio do *software Excel*, o que facilitou a confecção e as adaptações necessárias nas grelhas de jogo que foram feitas antes do dia da aula.

Pedimos para que os alunos se sentassem em duplas, de costas um para o outro. Deste modo, o oponente não conseguia visualizar a grelha de defesa de seu adversário. Explicamos a dinâmica do jogo no slide, de modo a tentar esclarecer previamente qualquer dúvida que os alunos poderiam ter sobre o jogo. Mesmo assim não foram sanadas todas as dúvidas, pois alguns alunos pediram ajuda para posicionar os navios de defesa, e perguntaram sobre como atacar.

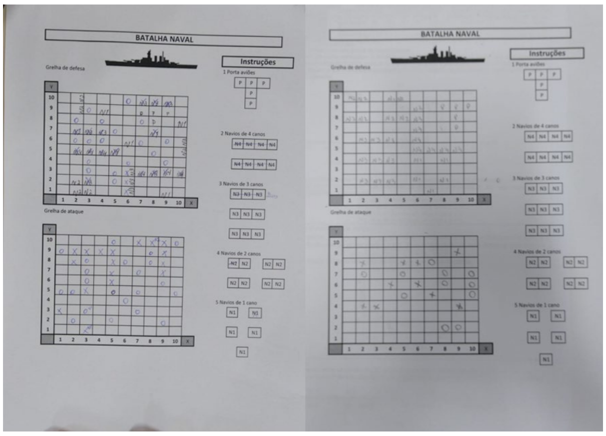
Disponibilizamos um tempo para que os alunos jogassem até as 09:10. Na sequência, começamos a distribuir os prêmios para o vencedor de cada dupla. Ocorreram dois empates e pedimos para que essas duplas decidissem um ganhador usando algum método a critério deles. O vencedor de cada dupla ganhou um bombom de chocolate, mas cada participante ganhou um *bis*. As fotos da figura abaixo mostra como ficou algumas grelhas durante o jogo.

Figura 7: Imagens das grelhas durante o jogo.



Fonte: Autores (2023).

Figura 8: Segunda imagem das grelhas durante o jogo.



Fonte: Autores (2023).

Após o jogo, começamos a introduzir a fórmula de distância entre dois pontos. Para motivar os alunos, iniciamos mostrando a distância entre pontos sobre os eixos cartesianos, pensando que fosse mais fácil dos alunos entenderem estes casos para posteriormente apresentarmos o caso geral. Notamos que os alunos demostraram que haviam compreendido a ideia para estes casos simples. Logo, mostramos uma forma de construir a fórmula mais conhecida do cálculo de distância entre dois pontos quaisquer ordenados. Alguns alunos mostraram espanto quando viram a construção, e foi mostrado uma aplicação desta fórmula para calcular a distância dos pontos nos eixos, com o intuito de mostrar que vale para aqueles dois casos mais fáceis. Feito isso, chegou a hora do intervalo.

Retornamos a aula às 10:00, mostrando mais um exemplo da aplicação da fórmula da distância entre dois pontos. Com isso, disponibilizamos um tempo maior que o previsto para a resolução de dois problemas. Havíamos programado para este momento se estender até às 10:40, contudo, houve muitas dúvidas por parte dos alunos, visto que eram dois problemas mais elaborados. Entre os alunos resolverem, apresentarmos a resolução e esclarecer as dúvidas tivemos um atraso de 20 minutos.

O próximo momento foi dedicado a apresentar a construção da fórmula das coordenadas do ponto médio entre dois pontos. Não fizemos as construções no quadro como de costume devido ao atraso do momento anterior. Deste modo, utilizamos as construções que estavam nos slides, compensando o atraso.

Apresentamos o conceito, porém alguns alunos demostraram não ter entendido etapas do cálculo. Assim, foi preciso mostrar de forma mais detalhada e utilizar mais exemplos. Após isso, apresentamos um exemplo de aplicação direta do conceito e, em seguida, propomos mais dois exercícios. Os alunos seguiram com dúvidas de cálculos básicos como regra de sinal, porém a maior parte chegou nos resultados corretos. Para finalizar a aula, apresentamos a resolução no slide e anunciamos que ficaria proposto uma lista de atividades para prática fora da aula. Avisamos que as dúvidas referentes a essa atividade seriam atendidas na próxima aula. Após este aviso, finalizamos o encontro.

3.4. **Plano de aula – 4º Encontro 01 abril de 2023.**

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Equação geral e reduzida da reta e posições relativas entre duas retas no plano.

Objetivo geral: Proporcionar a compreensão do conceito de equação geral, fundamental e reduzida da reta, estudando sua representação e propriedades. Além de estudar as posições relativas entre duas retas no plano.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Compreender a definição de equação geral, fundamental e reduzida da reta no plano cartesiano;
- Reconhecer uma equação de reta e representá-la graficamente no plano cartesiano;
- Entender a definição de retas paralelas, coincidentes, concorrentes e perpendiculares e identificar esses tipos no plano e algebricamente;
- Resolver diversos tipos de exercícios e problemas sobre o conteúdo abordado.

Tempo de execução: Uma aula com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook*, projetor multimídia, *Power Point*, *Excel* e folhas de papel sulfite.

Encaminhamento metodológico:

Realizaremos essa aula com auxílio do projetor presente na sala, projetando lâminas com definições, exemplos e outras informações referentes ao conteúdo. Os alunos serão organizados em grupos de quatro integrantes, mas com liberdade para se sentarem da maneira que preferirem.

O referencial metodológico que será adotado nesta aula será o da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que adquiriram no ensino básico, incentivando a pesquisa e o uso de diferentes métodos e estratégias de resolução.

Utilizaremos os problemas matemáticos de maneira diversificada, para iniciar determinando conteúdo ou para praticar. Será disponibilizado uma folha para cada aluno contendo exercícios, definições e explicações sobre os conceitos que serão trabalhados em aula.

1° Correção de atividades da aula passada (10 min, até as 08:10)

Primeiramente, realizaremos a correção das questões que ficaram sem solução na aula passada. Um estagiário estará no quadro resolvendo-as enquanto pede a participação dos alunos no desenvolvimento.

2° Introdução ao estudo da reta. (60 min, até as 09:10)

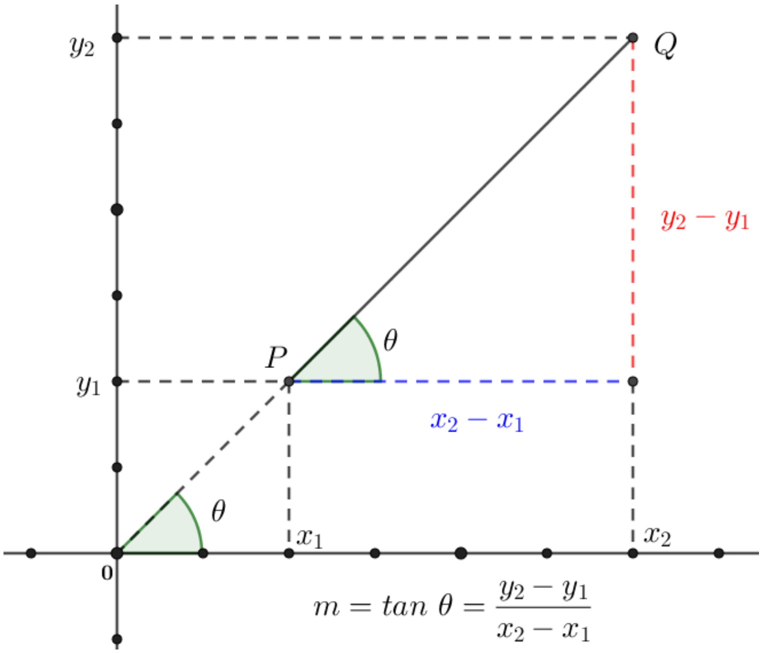
Começaremos a aula revisando brevemente o conceito de plano cartesiano e seus elementos como ponto, eixos e quadrantes. Um plano cartesiano será desenhado no quadro para auxiliar nessa revisão.

Toda reta presente no plano cartesiano pode vir a ser representada algebricamente na forma de uma equação, possibilitando a modelagem de diversos problemas do cotidiano que apresentam dados com um crescimento linear, por exemplo:

- funcionários que recebem um salário fixo com possível acrescimento dependendo da hora extra trabalhada;
- modelos de cobrança de taxi que tem um custo fixo inicial, mais um acréscimo referente a quantidade de quilômetros rodados;
- consumo em metro cúbico de água, em que a partir de determinada quantidade gasta ao longo do mês, uma nova tarifa de água é imposta;
- lucro de uma loja que depende da quantidade de vendas.

Apresentadas essas situações do diárias, vamos representar uma reta qualquer com dois pontos no plano cartesiano anteriormente construído, que servirá de introdução ao estudo da equação fundamental da reta, assim como mostrado na figura abaixo.

Figura 9: Ilustração de uma reta no plano.



Fonte: Autores (2023).

Definição – Coeficiente angular e equação fundamental da reta.

Considere os pontos distintos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pertencentes a reta r não vertical. O **coeficiente angular** (ou inclinação) dessa reta, denotado por m, é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Conhecendo m e escolhendo qualquer dentre os pontos conhecidos P e Q, podemos definir a reta r pela equação

$$y - y_i = m(x - x_i),$$

com (x_i, y_i) sendo igual a (x_1, y_1) ou (x_2, y_2). Essa equação é denominada **equação fundamental da reta**, e representa todos os pontos do plano cartesiano que pertencem a reta r.

Observação: A ordem de quem será o ponto P e quem será Q, dentre os dois pontos conhecidos, não importa.

De modo a ajudar os alunos a compreenderem esses dois conceitos, resolveremos no quadro o seguinte exemplo e pediremos que copiem no caderno para manterem registrado. Esse exemplo será apresentado numa lâmina do *Power Point*.

Exemplo: Determine o coeficiente angular e a equação fundamental da reta que passa pelos pontos $A(1,-4)$ e $B(3,8)$.

R: Escolhendo $A(1,-4) = (x_1, y_1)$ e $B(3,8) = (x_2, y_2)$.
O coeficiente angular da reta será

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-(-4)}{3-1} = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Conhecendo o valor de m e escolhendo o ponto A, a equação fundamental da reta será dada por

$$y - (-4) = 6(x-1)$$

$$\Rightarrow y + 4 = 6(x-1).$$

Ou, caso o ponto B seja escolhido,

$$y - 8 = 6(x-3).$$

Isolando a variável y, mostraremos que essas duas equações são iguais, ou seja,

$$y = 6x - 10.$$

Na sequência, vamos propor alguns exercícios. Daremos um tempo de quinze minutos para os alunos tentarem resolver. Enquanto isso, os estagiários andarão pela sala retirando dúvidas. Passado o tempo, um dos estagiários irá ao quadro apresentar a correção.

Exercícios – I

1) Determine o coeficiente angular das retas que passam pelos seguintes pontos:

a)$A(3,15)$ e $B(8,12)$.

b) $C(-5,15)$ e $D(2,1)$.

c) $E(1,60)$ e $F(-9,20)$.

2) Encontre o coeficiente angular das retas r e s, sendo que r passa por $A(4,0)$ e $B(7,10)$ e s passa por $C(3,11)$ e $D(5,7)$.

3) Determine a equação fundamental da reta que representa r e s.

Utilizando o exemplo anterior, vamos mostrar a partir da equação fundamental da reta já determinada o formato da equação geral e reduzida da reta.

- $y + 4 = 6x - 6 \Rightarrow$ Equação fundamental da reta.
- $y = 6x - 10 \Rightarrow$ Equação reduzida da reta.
- $6x - y - 10 = 0 \Rightarrow$ Equação geral da reta.

A forma geral recebe esse nome porque permite a representação de qualquer reta no plano, seja ela horizontal, vertical ou oblíqua. Já a forma reduzida deixa evidente o coeficiente angular e o coeficiente linear, (ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y).

Definição – Equação geral e reduzida da reta.

Seja r uma reta, sua representação também podem ser na forma de equação geral da reta

$$ax + by + c = 0,$$

em que x e y são variáveis e $a, b, c \in \mathbb{R}$, a e b não podendo ser simultaneamente nulas.

Sejam m e q os coeficientes angular e linear respectivamente.

Tem-se $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$, de modo que a equação reduzida dessa reta é

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + q.$$

Observação: Ambas as equações podem ser obtidas partindo da equação fundamental da reta.

O coeficiente linear é a ordenada do ponto de intersecção a reta com o eixo y, $(0, q)$.

Para praticarem esses dois novos formatos de equação, pediremos aos alunos que apresentem essas formas para as retas r e s do Exercício-I. Daremos um tempo de dez minutos antes de fornecer as respostas.

Na sequência faremos o seguinte questionamento: Dados quaisquer dois pontos distintos no plano cartesiano, podemos obter uma reta que passe por estes dois pontos?

Esperamos mostrar que isso vale por meio do *software Excel,* gerando um gráfico no slide apresentado.

3° Construção do gráfico de uma reta e modificando o coeficiente angular e linear através do Excel. (30 min, até as 09:40)

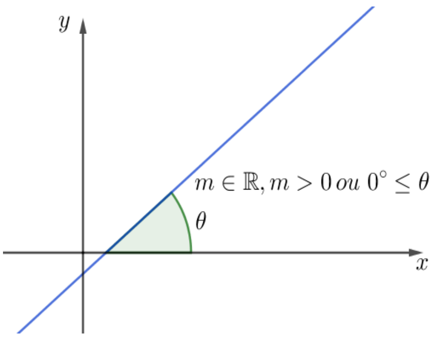
Na tentativa de trazer reflexão por parte dos alunos, eles serão questionados se existe uma reta que passa por quaisquer dois pontos do plano cartesiano. A ideia da resposta será apresentada no *Software do Excel*.

Focando agora na equação reduzida da reta $y = mx + q$, aproveitaremos o projetor multimídia para relembrá-los, com auxílio do *Software* do *Excel*, o que ocorre com uma reta qualquer quando modificamos seus coeficientes.

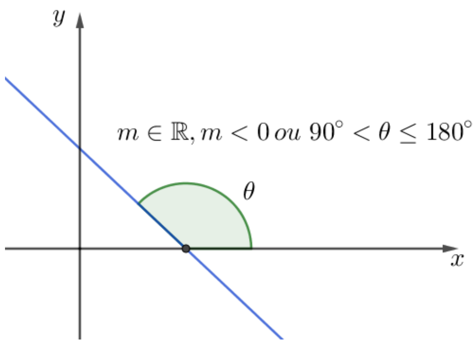
Aproveitaremos o momento para incentivar a sala a interagir, convidando-os a darem valores quaisquer para os coeficientes.

Observando o gráfico da equação $y = mx + q$.

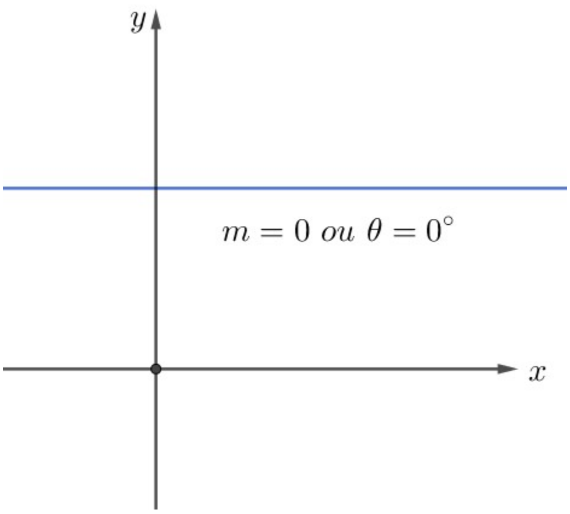
Reta oblíqua crescente



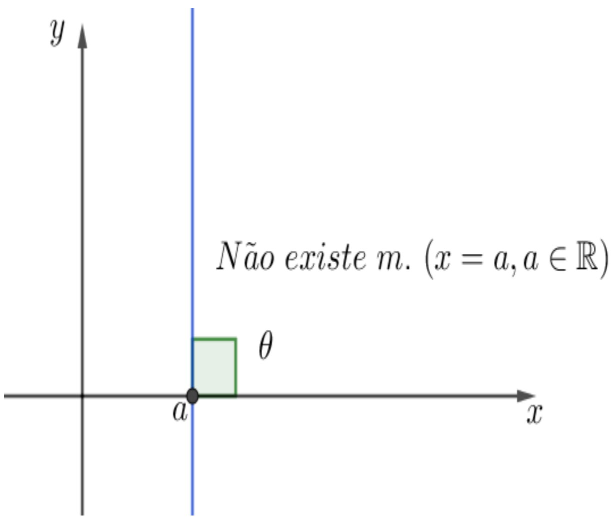
Reta oblíqua decrescente



Reta horizontal



Reta vertical ($\boldsymbol{não \; existe \; m}$)



Fonte: Autores (2023)

Na sequência, vamos ensiná-los os alunos a construírem o gráfico de uma reta conhecendo a equação geral que a representa. Explicaremos que nessa construção precisamos de apenas dois pontos dessa reta, e para evitar erros de representação no plano cartesiano, buscamos identificar os pontos por onde essa reta intersecta o eixo x e o eixo y.

Construção

Construção da reta r cuja equação geral é $3x + 5y - 15 = 0$.

O ponto que intersecta o eixo x tem obrigatoriamente 0 como valor no eixo y, isto é, $(x, 0)$.

Substituindo na equação,

$$3x + 5 \cdot 0 - 15 = 0$$

$$3x = 15$$

$$x = \frac{15}{3} = 5$$

Logo, o ponto por onde a reta intersecta o eixo x é $P(5,0)$.

O ponto que intersecta o eixo y tem obrigatoriamente 0 como valor no eixo x, isto é, $(0, y)$.

Substituindo na equação,

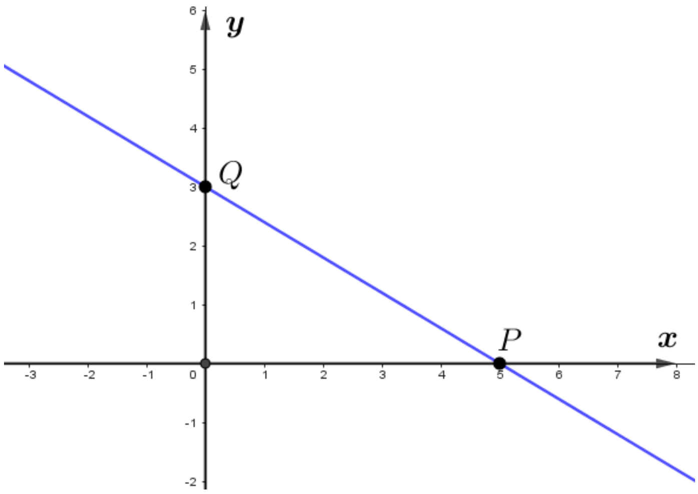
$$3 \cdot 0 + 5y - 15 = 0$$

$$5y = 15$$

$$y = \frac{15}{5} = 3$$

Logo, o ponto onde a reta intersecta o eixo y é $Q(0,3)$.

Figura 10: Ilustração da construção de reta.



Fonte: Autores (2023)

Antes do intervalo, vamos propor que realizem a construção das seguintes retas com o objetivo de praticarem.

Exercício de construção
Construa o gráfico das seguintes retas.
a) $r: 8x - y + 16 = 0$
b) $s: y = 2x + 3$

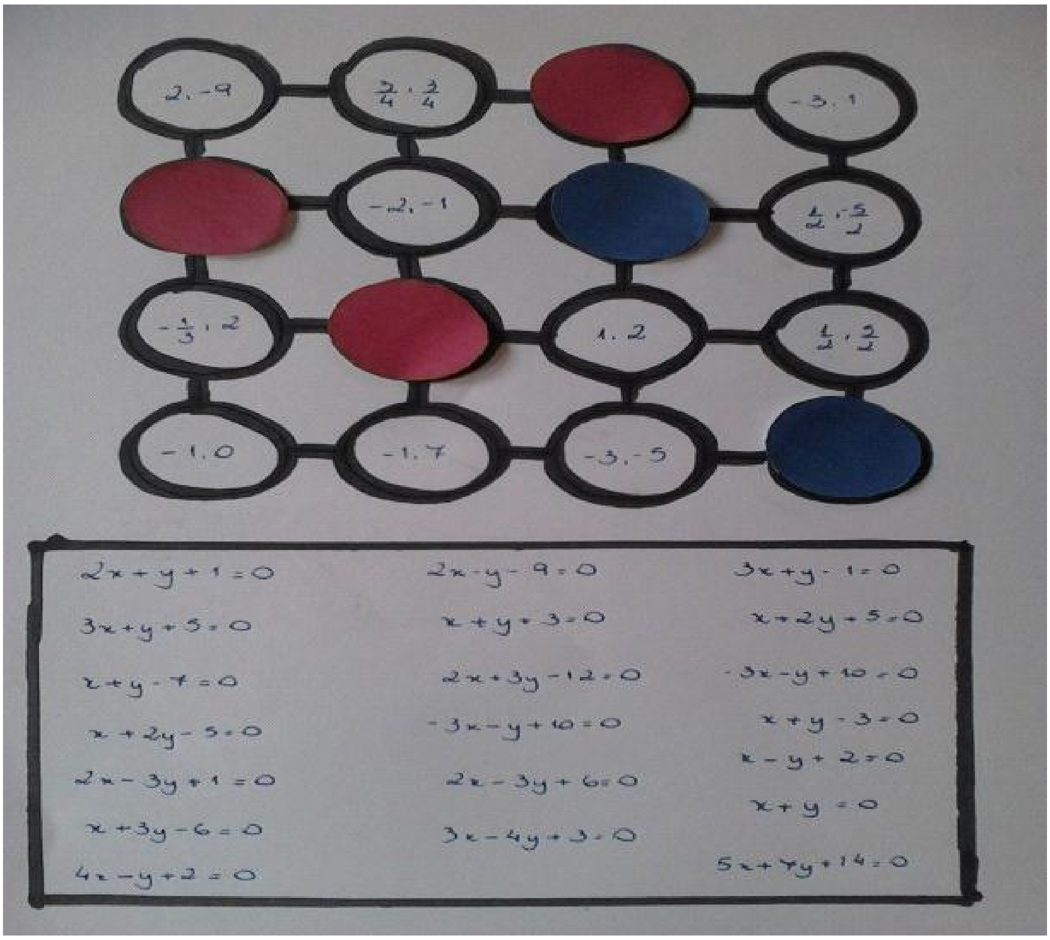
4° Intervalo (20 min, até as 10:00)

5° Jogo da divisão em linha para equação da reta. (60 min, até as 11:00)

Voltando do intervalo, vamos deixar dois planos cartesianos desenhados no quadro e convidaremos dois alunos para apresentarem a construção de uma das retas e o cálculo realizado para encontrar os dois pontos. Caso ninguém se ofereça a apresentar sua solução, um dos estagiários irá ao quadro apresentar as construções.

Na sequência, vamos propor o jogo da divisão em linhas adaptado para o estudo da equação da reta. Como as carteiras já estarão organizadas em grupos de quatro estudantes, cada grupo formará duas duplas para essa atividade. Em caso de haver um número ímpar de estudantes no dia da aula, a pessoa que sobrar poderá jogar em conjunto com outro jogador. Essa atividade foi escolhida por trabalhar os conceitos de equação geral e reduzida da reta e o processo de obtenção de seus coeficientes.

Exemplo de partida



Fonte: https://talentospedagogicos.blogspot.com/2014/03/jogos-matematicos.html

Dinâmica do jogo

Cada dupla receberá uma folha impressa semelhante a imagem acima. Cada círculo contém o valor do coeficiente angular e do coeficiente linear, respectivamente. Na região retangular estará inscrito algumas equações na forma geral, sendo que apenas algumas delas tem seus coeficientes inscritos nos círculos.

Cada dupla escolhe uma cor de ficha, podendo ser azul ou vermelha. O jogo será iniciado pelo jogador mais velho. Na sua vez de jogar, o jogador escolhe uma equação geral da reta de dentro do retângulo e determina a equação reduzida da reta, para encontrar o coeficiente angular e o coeficiente linear.

Se a resposta dos coeficientes estiver no tabuleiro, o jogador cobre-a com uma de suas fichas. O ganhador será aquele que alinhar quatro fichas na horizontal, vertical ou horizontal.

O jogador poderá usar seu caderno para obter as equações reduzidas das retas. Assim como na figura acima, colocaremos 20 equações na forma geral dentro da região retangular, das quais 16 delas possuem coeficientes inseridos nos círculos.

6° Posições relativas de duas retas no plano. (40 min, até as 11:40)

Neste momento, vamos apresentar as posições relativas entre duas retas, r e s, a partir de seus coeficientes angulares e lineares das equações que as representam.

Utilizando um plano cartesiano no quadro, mostraremos que essas retas podem ser paralelas distintas, paralelas coincidentes, concorrentes ou perpendiculares.

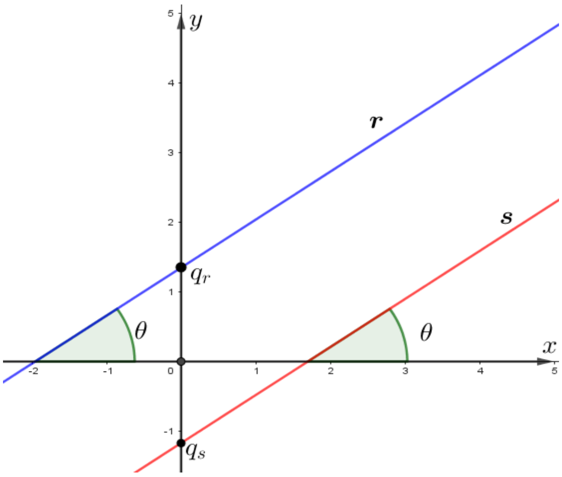
Definição – Retas paralelas, coincidentes, concorrentes e perpendiculares.
Dadas duas retas r e s, ambas são classificadas como **paralelas distintas** quando não possuem nenhum ponto em comum. Em outras palavras, elas são paralelas quando não se cruzam.
Essas retas serão **coincidentes** quando representam a mesma reta, ou seja, possuem infinitos pontos em comum.
E elas serão concorrentes quando possuírem um único ponto em comum, ou seja, quando elas se encontram em um único ponto. Quando essas se cruzam e formam um ângulo de 90° entre si, temos o caso particular de serem retas perpendiculares.

As propriedades que r e s devem assumir para serem classificadas como um desses tipos de retas, dependerá apenas de seus coeficientes.

Posições relativas entre duas retas no plano
Duas retas quaisquer, r e s, de equações reduzidas $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{y = m_r x + q_r}$ e $\boldsymbol{s}$: $\boldsymbol{y = m_s x + q_s}$, respectivamente, são:
1) **Paralelas distintas** se, e somente se, elas possuem o mesmo coeficiente angular e seus coeficientes lineares são diferentes, $(m_r = m_s, q_r \neq q_s)$, ou não existem

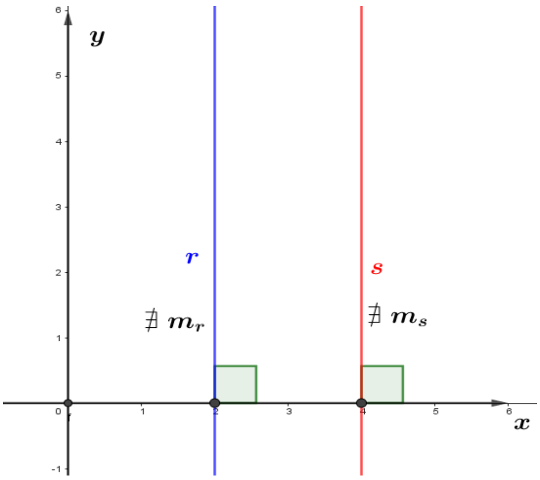
coeficientes angulares ($\nexists m_r$ e $\nexists m_s$) e ambas intersectam o eixo x em pontos diferentes.

Figura 11: Retas paralelas – Caso 1.



Fonte: Autores (2023).

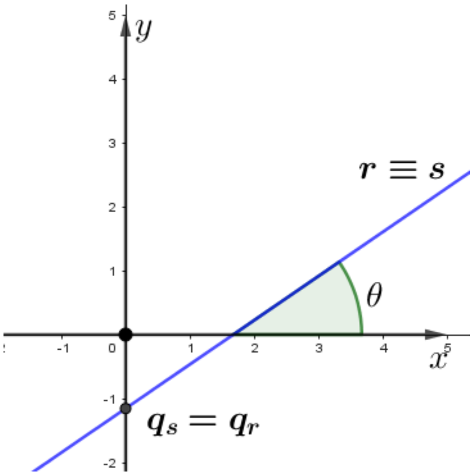
Figura 12: Retas paralelas – Caso 2.



Fonte: Autores (2023)

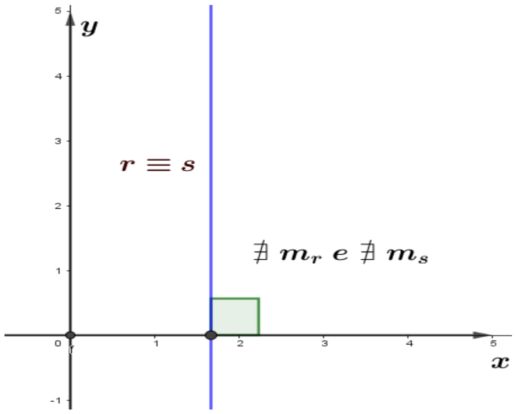
2) **Paralelas coincidentes** se, e somente se, têm o mesmo coeficiente angular e seus coeficientes lineares são iguais, $(m_r = m_s, q_r = q_s)$, ou não existem coeficientes angulares ($\nexists m_r$ e $\nexists m_s$) e ambas intersectam o eixo x no mesmo ponto.

Figura 5: Paralelas coincidentes – Caso 1



Fonte: Autores (2023).

Figura 6: Paralelas coincidentes – Caso 2



Fonte: Autores (2023)

3) **Concorrentes** se, e somente se, têm coeficientes angulares diferentes $(m_r \neq m_q)$, ou existe o coeficiente angular de uma delas e não existe da outra. $(\exists m_r, \nexists m_s)$.

Figura 7: Retas Concorrentes – Caso 1.

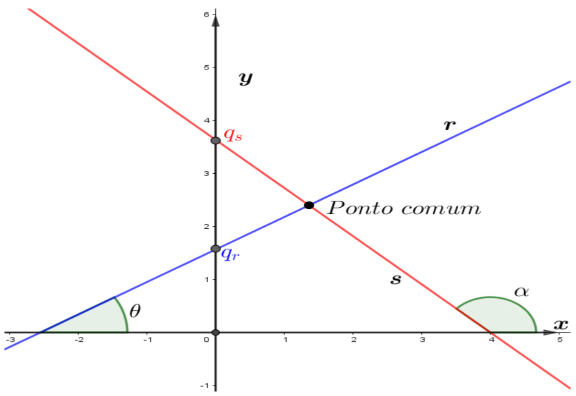
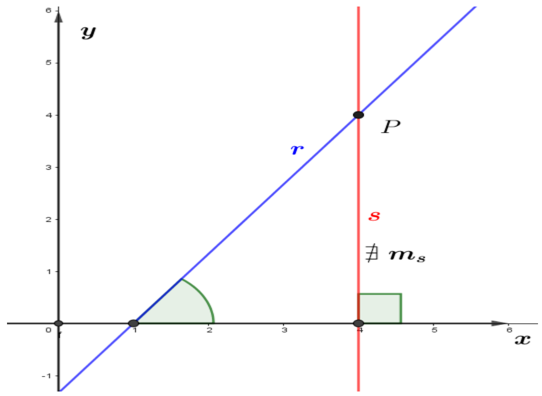


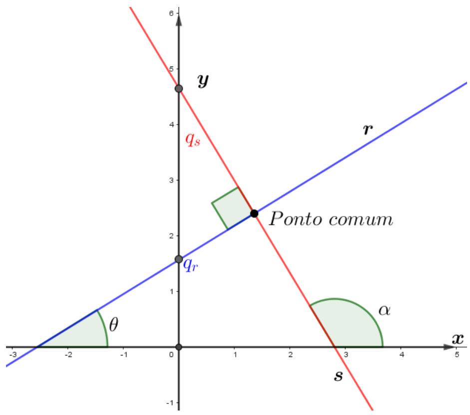
Figura 8: Retas Concorrentes – Caso 2.



Fonte: Autores (2023)

4) **Perpendiculares** se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra. $\left(m_r = -\frac{1}{m_s}\right)$

Figura 9: Retas perpendiculares.



Fonte: Autores (2023).

Para verificar se compreenderam esses conceitos sobre posições relativas entre duas retas, faremos junto com eles o seguinte exemplo para encontrar uma reta paralela a outra. Essa questão foi escolhida por aplicar diretamente o conceito de retas paralelas e ser de simples resolução.

Exemplo

Obtenha a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P(-1,3)$ e é paralela à reta s: $9x + y - 18 = 0$.

R: A reta r passa pelo ponto $P(-1,0)$ e é paralela a reta s, ou seja, possuem mesmo coeficiente angular. Colocando s na forma de equação reduzida da reta, encontramos seu coeficiente angular,

$$9x + y - 18 = 0$$
$$y = -9x + 18$$

Logo, o coeficiente angular de s é $m_s = -9$. Assim, o coeficiente angular de r é $m_r = -9$. Conhecendo um ponto P e o coeficiente angular, determinamos a equação fundamental da reta.

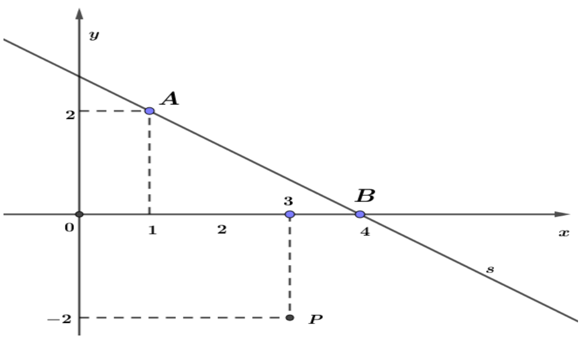
$$y - 3 = -9(x - (-1))$$
$$y = -9x - 9 + 3$$
$$y = -9x - 6$$

Em seguida, preparamos uma lista de atividades com cinco atividades que abrangem todo o conteúdo estudado nesse encontro, sendo quatro exercícios e um problema de vestibular.

Em um primeiro momento, vamos resolver a questão um como exemplo, mostrando como trabalhar com esses dados da atividade. As quatro primeiras questões foram selecionadas do livro Matemática Paiva (2009, Vol. 3, p. 53-54) por não serem tão complicadas e abordarem os conceitos de retas paralelas e retas perpendiculares. Já o problema da Fuvest foi escolhido por abordar a equação fundamental da reta e retas perpendiculares.

Lista de atividades

1) (modificado) Determine a equação reduzida da reta r, que passa pelo ponto P e é paralela à reta s representada abaixo.



Fonte: Autores (2023).

2) Obter uma equação geral da reta r que passa pelo ponto $P(-5, -1)$ e é paralela à reta s de equação $6x + 3y - 1 = 0$.

3) Determine a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P(0,0)$ e é paralela à reta $s: 2x - 3y + 1 = 0$.

4) Obter a equação geral da reta r que passa pelo ponto $P(1,5)$ e é perpendicular à reta s de equação $2x + y + 4 = 0$.

5) (FUVEST) As retas r e s são perpendiculares e interceptam-se no ponto $(2,4)$. A reta s passa pelo ponto $(0,5)$. Uma equação da reta r é:

a) $2y + x = 10$.
b) $y = x + 2$.
c) $2y - x = 6$.
d) $2x + y = 8$.
e) $y = 2x$.

Como atividades extras, deixaremos primeiro a questão do concurso OMNI 2021 para psicólogo da Prefeitura de Itamarati – Minas Gerais. Essa questão foi escolhida por abordar todos os conceitos comentados e ser de simples resolução. A segunda é uma questão de verificação da posição relativa entre retas.

Questão extra 1

(OMNI 2021 - Prefeitura de Itamarati – MG). No plano cartesiano, consideremos as retas $r: ax + b$ e $s: mx + n$, e que sobre os valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ e a posição relativa entre as retas, assinale o que for CORRETO.

a) Se $a = m$, então as retas r e s são paralelas e não tem pontos em comum.
b) Se $a \neq m$, então as retas r e s são perpendiculares.
c) Se $b = n$, então as retas r e s são coincidentes.
d) Se $a = -\frac{1}{m}$, com $m \neq 0$ então as retas r e s são perpendiculares.

Questão extra 2

Sejam as retas: $\boldsymbol{r}$**:** $\boldsymbol{y = 3x + 6}$, $\boldsymbol{s}$**:** $\boldsymbol{y = 3x - 4}$, $\boldsymbol{t}$**:** $\boldsymbol{9x - y + 21 = 0}$ **e** $\boldsymbol{u = -\frac{1}{3}x + 12}$.
Descreva a posição relativa entre:

a) r e s

b) r e t

c) s e u

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou no quadro negro.

Referências

CAMARGO, Cecilia Rosane Louzada Ramires. Jogos Matemáticos. *Talentos pedagógicos.* 2014. Disponível em: https://talentospedagogicos.blogspot.com/2014/03/jogos-matematicos.html. Acesso em: 01 mar. 2023.

DALBOSCO, Anderson Medeiros. Posições Relativas entre Retas 10 exercícios com Gabarito. *Exercícios Web*. 2016. Disponível em: https://exerciciosweb.com.br/matematica/posicoes-relativas-entre-retas-exercicios/. Acesso em: 01 mar. 2023.

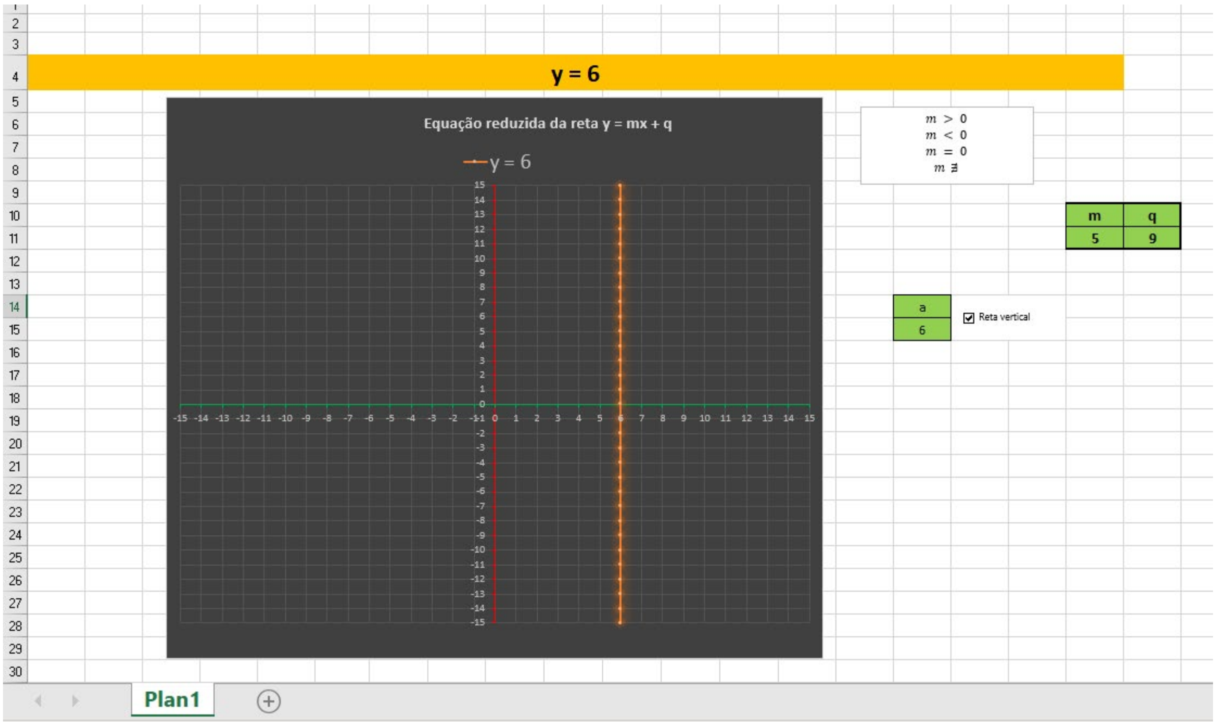
PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2009. Vol. 3.

PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2009. Vol. 2.

Apêndice A:

$m = -3$ $q = 10$	$m = \frac{-1}{2}$ $q = \frac{5}{2}$	$m = -1$ $q = 3$	$m = -1$ $q = 7$
$m = -2$ $q = -1$	$m = -3$ $q = 10$	$m = 0$ $q = -2$	$m = 1$ $q = 2$
$m = \frac{2}{3}$ $q = 2$	$m = \frac{-1}{2}$ $q = \frac{-5}{2}$	$m = -1$ $q = 0$	$m = -3$ $q = -5$
$m = -3$ $q = 1$	$m = \frac{2}{3}$ $q = \frac{1}{3}$	$m = -3$ $q = -7$	$m = \frac{-2}{3}$ $q = 4$

$2x + y + 1 = 0$	$2x + y - 9 = 0$	$x + 2y + 5 = 0$
$3x + y + 5 = 0$	$x + y + 3 = 0$	$-3x - y + 10 = 0$
$x + y - 7 = 0$	$2x + 3y - 12 = 0$	$x + y - 3 = 0$
$x + 2y - 5 = 0$	$-3x - y + 10 = 0$	$x - y + 2 = 0$
$2x - 3y + 1 = 0$	$2x - 3y + 6 = 0$	$x + y = 0$
$x + 3y - 6 = 0$	$3x - 4y + 3 = 0$	$12x + 4y + 28 = 0$
$y + 2 = 0$	$3x + y - 1 = 0$	



y = 6
Equação reduzida da reta y = mx + q
y = 6
m > 0
m < 0
m = 0
m ∄
m
q
5
9
a
6
Reta vertical
Plan1

3.4.1. **Relatório – 01/04/2023**

Relatório 4 - Sala A205

No dia primeiro de abril de 2023, um dia ensolarado, foi realizado o quarto encontro do Promat, contando com a presença de 16 alunos. A redução no número de alunos não nos surpreendeu, visto que essa é uma tendência que se observa em todos os anos do projeto. O tema da aula foi equação geral e reduzida da reta e posições relativas entre retas. A aula teve início as oito horas e dez minutos, pois alguns alunos se atrasaram para chegar na universidade.

Começamos corrigindo dois exercícios que haviam ficado da aula anterior. Resolvemos apenas dois, porque os outros seguiam o mesmo método de resolução. Em um deles as coordenadas das extremidades de um segmento eram dadas, e pedia-se para calcular as coordenadas do ponto médio. No outro exercício eram dadas as coordenadas de uma extremidade do segmento, e as coordenadas do ponto médio, pedindo-se para encontrar as coordenadas da outra extremidade. Foi ressaltado aos alunos que, caso houvesse alguma dúvida, eles poderiam nos perguntar na mesma hora ou posteriormente.

Demos continuidade a aula relembrando alguns conceitos do plano cartesiano. Fornecemos alguns exemplos de situações do cotidiano em que se observa um crescimento ou decrescimento linear, para então apresentarmos a forma algébrica de uma reta, no caso a equação da reta, mostrando e nomeando cada tipo de equação.

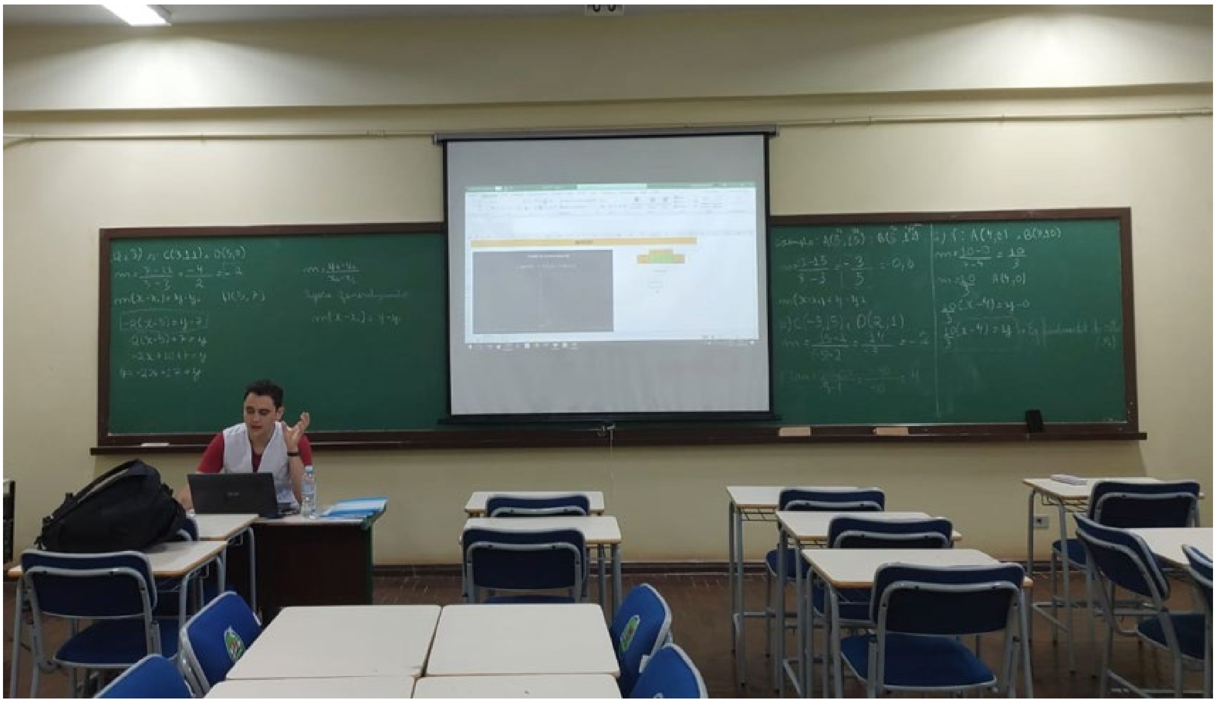
Após os alunos já saberem como é cada tipo de equação da reta, sendo elas equação reduzida, geral e fundamental da reta, eles foram questionados sobre a existência de uma reta que passa por dois pontos quaisquer. Alguns alunos contribuíram dizendo que sim outros que não. Esta questão foi respondida com o auxílio do *software Excel*. Solicitamos para que os alunos nos fornecessem as coordenadas de dois pontos no plano cartesiano e, a cada dois pontos fornecidos, apresentamos uma reta cujo gráfico era fornecido pelo *software*, como mostra a foto da figura abaixo capturada no dia.

Figura 13: Apresentação de retas no Excel.

Fonte: Autores (2023).

Além disso, mostramos como as alterações dos coeficientes angular e linear produzem na posição e inclinação da reta. Realizamos as alterações desses coeficientes, questionando os alunos para que eles identificassem quais alterações a reta sofria. Os alunos conseguiram entender que o coeficiente angular altera o crescimento da reta, ou seja, muda a inclinação dela, e o coeficiente linear altera a posição da reta no gráfico. Mostramos ainda que a reta pode ser crescente ou decrescente, caso o coeficiente angular seja estritamente maior ou menor que zero respectivamente. A figura abaixo retrata este momento.

Figura 14: Apresentando a influência dos coeficientes linear e angular de uma reta, no Excel.



Fonte: Autores (2023).

Após essa apresentação, foram propostas algumas atividades para que os alunos trabalhassem esses conceitos, interpretando as equações e fazendo manipulações algébricas. Os alunos mostraram alguma dificuldade na interpretação dos enunciados e na aplicação dos conceitos, mas conseguiram fazê-los com a nossa orientação. Depois de um tempo, os exercícios foram resolvidos no quadro, terminando então a primeira parte da aula e dando início ao intervalo.

Após o intervalo, foi solicitado que os alunos se sentassem em dupla, para que pudéssemos aplicar um jogo. Este jogo tinha como objetivo fixar os conceitos de coeficiente angular, coeficiente linear e equação geral da reta. O jogo era composto de dois retângulos, em um retângulo havia 16 círculos e em cada um deles havia um coeficiente angular indicado pela letra m e um coeficiente linear indicado pela letra q. Os círculos estavam dispostos em uma formação de 4 linhas com 4 colunas em cada linha. No outro retângulo, havia 20 equações de retas na sua forma geral. O objetivo do jogo era escolher uma equação de reta e modificá-la para encontrar os seus coeficientes e então procurar o círculo que tinha os coeficientes correspondentes para, sem seguida, posicionar um quadrado de papel colorido em cima desse círculo. Cada jogador tinha papéis de cores diferentes e ganharia o jogo aquele que conseguisse formar uma linha vertical, horizontal ou diagonal. Alguns alunos tiveram dificuldades na execução do jogo enquanto outras equipes mostraram que entenderam a dinâmica e conseguiram fazer as manipulações algébricas para encontrar os coeficientes necessitando apenas confirmar se as suas contas estavam corretas. O jogo foi aplicado das 10h às 11h.

Depois do jogo, foi solicitado a atenção dos alunos novamente para tratar do último conteúdo da aula. Foi usado o projetor multimídia e gráficos feitos no quadro para mostrar as posições relativas entre as retas. Em seguida, mostramos como determinar as posições relativas analisando apenas os coeficientes da equação de cada reta. Enquanto os conteúdos eram apresentados, nós procurávamos nos certificar de que os alunos estavam percebendo o que as retas tinham em comum quando elas eram paralelas, coincidentes, concorrentes e perpendiculares em termos dos coeficientes da equação da reta. Alguns alunos responderam às perguntas, mas sempre de uma forma mais tímida. Acreditamos que eles tenham percebido os conceitos, mas que era necessário reforçar essas ideias. A aula terminou com um exemplo e foi solicitado aos alunos, caso pudessem, a resolução do resto das questões da lista que foi distribuída a eles. Essas seriam corrigidas e disponibilizadas posteriormente no grupo do *WhatsApp*, ou no início da próxima aula.

3.5. Plano de aula – 5º Encontro 15 abril 2023.

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Pontos colineares, condições de concorrência e paralelismo entre duas retas, distância entre ponto e reta e distância entre retas.

Objetivo geral: Proporcionar a compreensão do conceito de pontos colineares, estudando a condição que caracteriza a relação entre esses pontos. Desenvolver o conceito do cálculo de distância entre ponto e reta, além de definir a posição relativa entre uma reta e uma circunferência.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Compreender o conceito de pontos colineares e distância entre ponto e reta;
- Compreender e utilizar o conceito de distância entre dois pontos como condição para que três pontos sejam colineares;
- Entender e identificar uma equação geral e reduzida de circunferência;
- Definir as posições relativas entre uma reta e uma circunferência;
- Resolver exercícios e problemas diversos referentes ao conteúdo dessa aula.

Tempo de execução: Uma aula com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook*, projetor multimídia, *Power Point* e folhas de papel sulfite.

Encaminhamento metodológico:

Realizaremos essa aula com auxílio do projetor multimídia presente na sala, projetando lâminas com definições, exemplos e outras informações referentes ao conteúdo. Os alunos serão organizados em grupos de quatro, mas com liberdade para se sentarem da maneira que preferirem.

Todos os conteúdos do presente plano que estão com borda serão projetados em slide para os alunos. Um estagiário irá explicar o conceito, fazendo uso do quadro quando achar necessário.

Seguiremos os processos da tendência metodológica para resolução de problemas, com foco em resgatar o conhecimento desenvolvidos no ensino básico, incentivando a pesquisa e o uso diferentes métodos e estratégias de resolução.

Utilizaremos os problemas matemáticos de maneira diversificada, para motivar um determinando conteúdo ou para praticar. Uma folha contendo definições, exercícios e explicações sobre os conceitos que serão trabalhados em aula será distribuída para cada aluno.

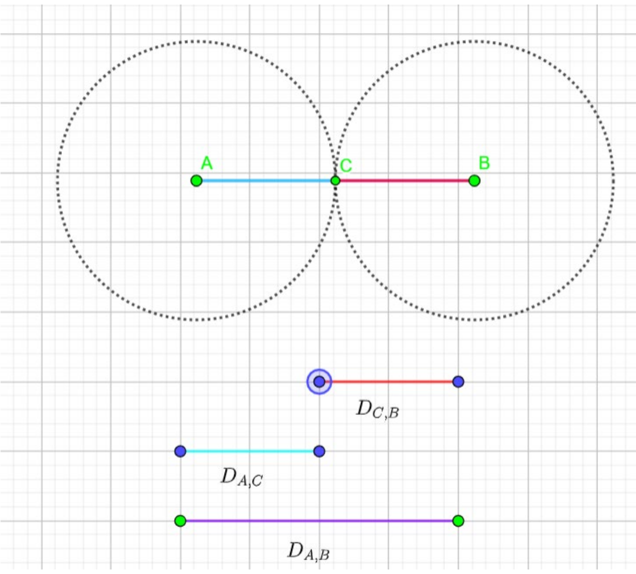
1º Correção de atividades da aula passada. (20min, até às 08:20)

Primeiramente, realizaremos a correção de questões que ficaram sem solução na aula passada. Um estagiário resolverá as questões no quadro enquanto convida os alunos a participarem do desenvolvimento da correção.

2º Pontos colineares (40min, até as 09:00)

Neste momento vamos apresentar a ideia de pontos colineares. Para isso, iniciaremos mostrando por meio do *software GeoGebra* uma ilustração animada da condição de existência de um triângulo. Tal apresentação servirá como motivador para explicarmos um caso em que é possível dizer se os pontos são colineares.

Figura 15: Ilustração de condição de existência de um triângulo.



Fonte: Autores (2023).

Após isto, apresentaremos de maneira formal o que ilustramos anteriormente, que é a desigualdade triangular ou condição de existência de um triangulo.

Desigualdade triangular

Para garantir a existência de um triângulo qualquer de vértices ABC, o comprimento de um dos lados desse triângulo deve ser sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados, isto é,

$$d(A,B) < d(B,C) + d(A,C)$$
$$d(A,C) < d(B,C) + d(A,B)$$
$$d(B,C) < d(A,C) + d(A,B)$$

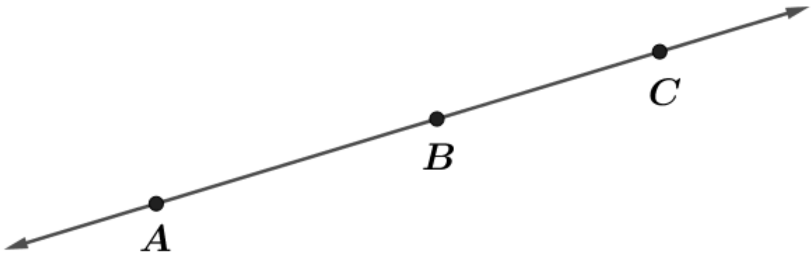
Sendo $d(A,B)$, $d(A,C)$ e $d(B,C)$ os comprimentos dos lados do triângulo.

Neste momento, espera-se que os alunos percebam que para qualquer ponto "fora" da reta AC, será sempre possível construir um triângulo, e a única forma de não existir tal triângulo seria se o terceiro ponto escolhido para ser o vértice, fosse um ponto sobre a reta AC, em outras palavras, se a soma entre os comprimentos de dois lados desse triângulo for igual ao comprimento do terceiro lado. E dessa forma, teremos que os três pontos pertencem a uma mesma reta.

Definição – Condição de alinhamento de três pontos.

Dizemos que três pontos distintos estão alinhados, ou são colineares, quando existe uma reta que passa por esses três pontos.

Figura 16: Pontos colineares.



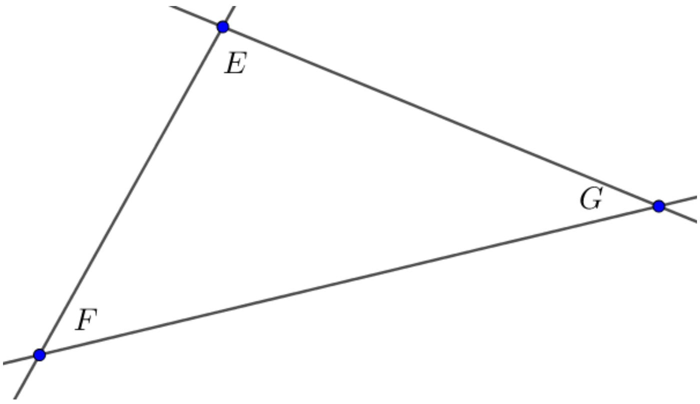
Fonte: Autores (2023).

Se A, B e C são três pontos alinhados, então não existe um triângulo ABC, e temos:

$$d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$$

Se os pontos E, F e G não são colineares, isto é, não estão alinhados, então existe o triângulo EFG, e, portanto, a medida de um lado é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois.

Figura 17: Ilustração de pontos que formam um triângulo.



Fonte: Autores (2023).

Na sequência, como forma de ajudá-los a compreenderem esse novo conceito, resolveremos o exemplo abaixo. Buscaremos a participação dos estudantes ao perguntar como se calcula a distância entre dois pontos no plano cartesiano e como se dava a fórmula.

Exemplo:

Verifique se os pontos $A(-3,7)$, $B(0,8)$ e $C(6,10)$ são colineares.

Solução:

$d(A,C) = \sqrt{\left(6-(-3)\right)^2 + (10-7)^2} = \sqrt{(6+3)^2 + 3^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = \sqrt{3^2 \cdot 10} =$

$3\sqrt{10}$.

$d(A,B) = \sqrt{\left(0-(-3)\right)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{(3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

$d(B,C) = \sqrt{(6-0)^2 + (10-8)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$.

Então:

$d(A,C) = 3\sqrt{10} = 2\sqrt{10} + \sqrt{10} = d(A,B) + d(B,C)$.

Logo, A, B e C são colineares.

Em seguida, pediremos aos alunos que resolvam a seguinte lista de exercícios para treinarem o conceito estudado. A solução desta será apresentada no quadro por um estagiário após o retorno do intervalo.

É esperado que alguns alunos tenham dificuldade em utilizar operações de radiciação, então os estagiários passarão pela sala relembrando-os de como decompor os números nas raízes e depois extraí-los.

Exercícios - II

Verifique se os seguintes pontos são colineares.

$a)A(1,2)$, $B(5,2)$ e $C(6,2)$

$b)E(5,1)$, $F(3,3)$ e $G(0,4)$

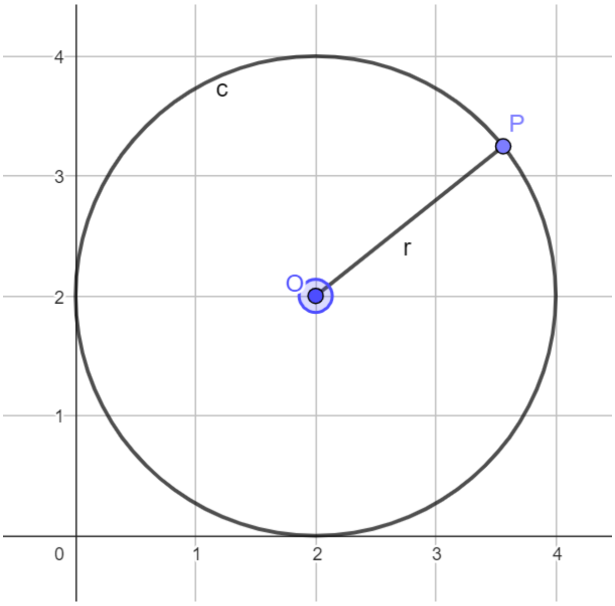
3º Introdução ao estudo da circunferência (40min, até as 9:40)

Vamos apresentar o conceito de circunferência, em slide, utilizando a definição e um exemplo, ilustrando os pontos que pertencem a esta. Em seguida, apresentaremos a equação da circunferência de modo geral. A ilustração poderá ser desenhada no quadro, caso os alunos apresentem dificuldade em compreender o conceito.

Definição de Circunferência:

Uma circunferência com centro $O(a,b)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos $P(x,y)$ do plano cartesiano equidistantes de O, (equidistam uma distância r do ponto O). Geometricamente:

Figura 18: Ilustração de circunferência.



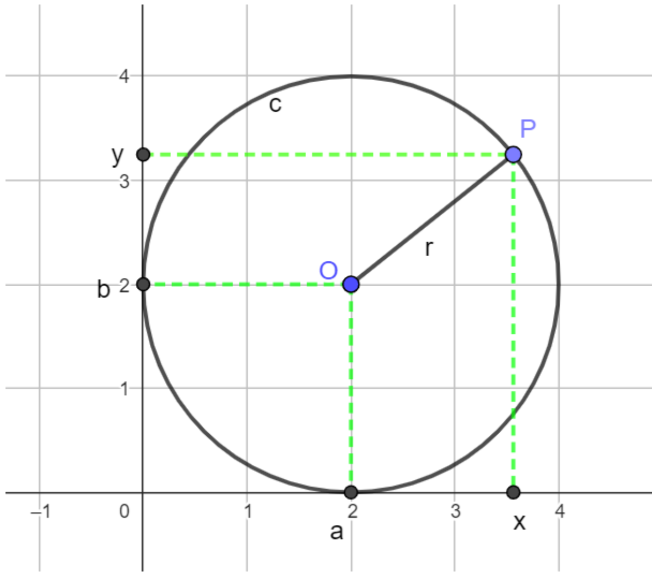
Fonte: Autores (2023).

Para a equação desta, partimos da ideia de distância entre dois pontos, a partir de um ponto fixo qualquer.

Equação da Circunferência:

A equação é obtida pela fórmula da distância entre dois pontos. Esta distância é o raio da circunferência, o ponto de análise dado é um ponto fixo, este é o centro.

Figura 19: Ilustração para a equação da circunferência.



Fonte: Autores (2023).

Deste modo, temos $O(a, b)$ e $P(x, y)$ e devemos calcular a distância r entre estes dois pontos, deste modo:

$$D_{OP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Assim, essa equação é denominada **equação reduzida da circunferência.**

Usaremos um exemplo para mostramos a equação da maneira que aparece em problemas, e com esta podemos identificar o centro, o raio e fazermos o gráfico, sabendo a lei da equação.

Exemplo:

Dada a equação da circunferência $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$, determine seu **centro**, **raio** e esboce o seu gráfico.

R: O centro é $O(3,4)$ e o raio é 5 u. (u denota a unidade, pois não sabemos qual unidades estamos usando).

O gráfico pode ser desenhado a partir destas informações e será exposto no quadro.

Na sequência, com objetivo de ajudá-los a compreenderem a posição e formação de uma circunferência qualquer no plano cartesiano através da equação reduzida da circunferência, vamos pedir que identifiquem o centro e o raio de cada uma das equações abaixo. Essas equações serão mostradas em lâminas do *Power Point.*

Praticando:

Identifique o centro e o raio de cada circunferência no plano cartesiano.

a) $(x-2)^2 + (y)^2 = 36$

b) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

c) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 144$

d) $\left(x-\sqrt{12}\right)^2 + (y-3^2)^2 = 400$

e) $(x-7)^2 + (y-16)^2 = 196$

Equação geral da circunferência:

A equação geral da circunferência é dada a partir da equação reduzida, simplesmente expandindo os dois quadrados da fórmula, a saber, $(x-a)^2$ e $(y-b)^2$.

$(y-b)^2 = y^2 - 2by + b^2$

$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Assim surge a equação **geral** ou **normal** da circunferência.

Utilizaremos um exemplo para mostramos a equação da maneira que aparece em problemas. Desta forma, como podemos chegar na equação reduzida por comparação de equações.

Exemplo:

Dada a circunferência de equação: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, encontre sua equação reduzida, seu centro e raio.

R: Igualando a equação com a forma geral:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2$$

Assim temos:

$$x^2 = x^2$$

$$y^2 = y^2$$

$$-2x = -2ax \Rightarrow a = 1$$

$$4y = -2by \Rightarrow b = -2$$

$$-4 = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$-4 = 1^2 + (-2)^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$-4 = 5 - r^2 \Rightarrow$$

$$-9 = -r^2 \Rightarrow$$

$$r = \pm\sqrt{9} \Rightarrow r = 3$$

Como não existe distância negativa, seque que o raio é 3 u. E o centro é $O(1,-2)$.
A equação reduzida fica:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$$

Passaremos alguns exercícios para a fixação do conceito trabalhado. Deixaremos que os alunos tentem fazer, verificando se algum aluno deseja fazer a resolução de algum deles no quadro.

Exercícios I

1) Determine a equação reduzida e geral de uma circunferência:

a) Com centro no ponto $O(-3,1)$ e raio 3.

b) Com centro no ponto $O(0,4)$ e raio 6.

c) Com centro no ponto $A(1,-2)$ e que passa pelo ponto $P(2,3)$.

4º Intervalo. (20min, até 10:00 min)

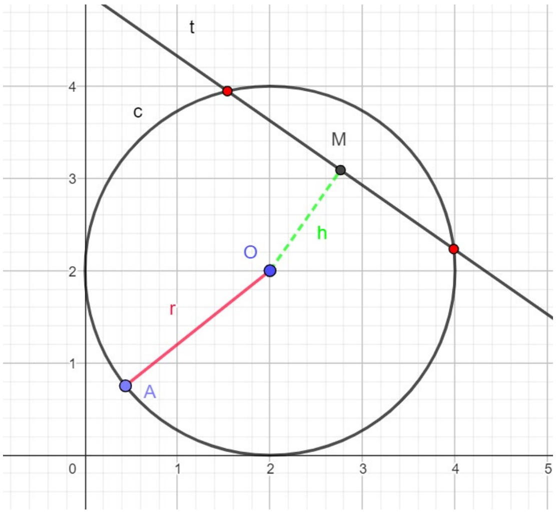
5º Posição relativa entre reta e circunferência. (40min, até as 10:40)

Observaremos que podemos ter três casos de posições relativas entre uma reta e uma circunferência.

Primeiro Caso:

A reta t pode ser **secante** à circunferência:

Figura 20: Reta secante a circunferência.



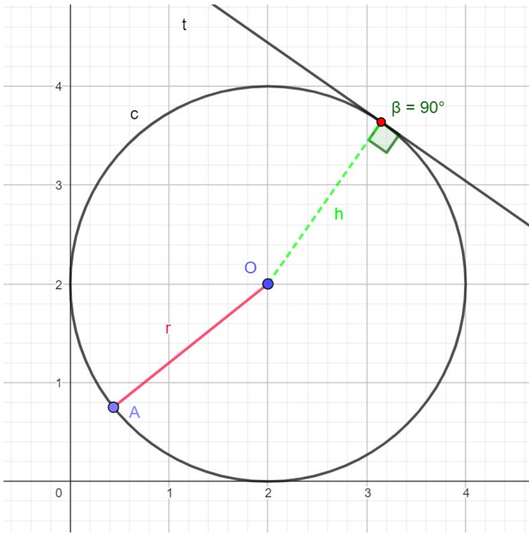
Fonte: Autores (2023).

Note que **a distância do centro até a reta é menor que o raio** da circunferência.

Segundo Caso:

A reta t pode ser **tangente** à circunferência:

Figura 21: Reta tangente a circunferência.



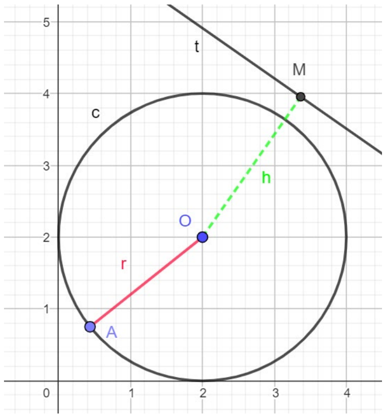
Fonte: Autores (2023).

Note que **a distância do centro até a reta é igual ao raio** da circunferência.

Terceiro Caso:

A reta t pode ser **externa** à circunferência:

Figura 22: Reta externa à circunferência.



Fonte: Autores (2023).

Note que **a distância do centro até a reta é maior que o raio** da circunferência.

Para definirmos a posição relativa de uma reta com uma circunferência vamos apresentar o conceito de distância entre ponto e reta, que é suficiente para dizermos em qual caso a reta se encontra.

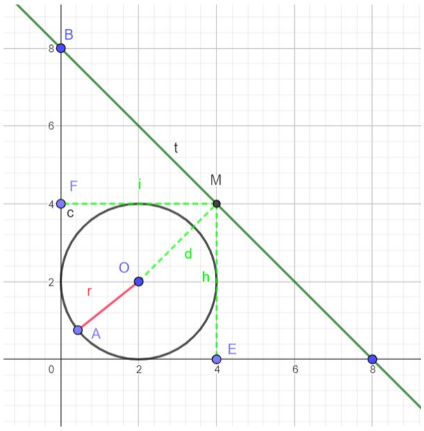
Vamos calcular a distância d entre um ponto O e uma reta t. Essa distância é a medida do segmento $\overline{OM}$, em que M é a projeção ortogonal de O sobre a reta t, ou seja, é a menor distância entre o ponto O e a reta t. Vamos expor no quadro um exemplo para calcularmos a distância entre um ponto e uma reta, sendo este ponto o centro de uma circunferência.

Distância entre ponto e reta.

A distância d entre um ponto $O(x_0, y_0)$ e uma reta s de equação geral $ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Figura 23: Ilustração de distância entre ponto e reta.



Fonte: Autores (2023).

Agora para encontramos a posição da reta basta calcularmos a distância entre o centro e a reta, e compararmos com o raio da circunferência. Vamos mostrar um exemplo para fixação.

Exemplos:

1) Calcule a distância d entre o ponto $C(3,3)$ e a reta $s: x + y - 4 = 0$

2) Seja a circunferência C, $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$ e a reta $-x + 8 = y$, determine a posição desta reta em relação a essa circunferência.

3) Seja a circunferência C, $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ e a reta $2x + y - 1 = 0$, determine a posição desta reta em relação a essa circunferência.

Solução:

1) Atribuímos os valores $a = 1$, $b = 1$, $c = -4$, $x_0 = 3$ e $y_0 = 3$. Obtemos então, $d = \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-4)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow d = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

2) Encontramos centro desta circunferência que é $O(2,2)$ e o raio é 2.

Agora calculamos a distância entre a reta e o centro.

A **Equação geral** da reta é: $-y - x + 8 = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|-2 - 2 + 8|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}}$$

$$d = \frac{|4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cong 2{,}82$$

Note que $2{,}82 > r = 2$.

Logo, a reta é externa a circunferência.

3) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2$

$$x^2 = x^2$$

$$y^2 = y^2$$

$$6x = -2ax \Rightarrow a = -3$$

$$-8y = -2by \Rightarrow b = 4$$

$$0 = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$0 = (-3)^2 + (4)^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$r^2 = 9 + 16 \Rightarrow$$

$$r^2 = 25 \Rightarrow$$

$$r = \pm\sqrt{25} \Rightarrow r = 5$$

Agora, calculando a distância entre o ponto $O(-3{,}4)$ e a reta $2x + y - 1 = 0$,

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|2(-3) + 1(4) - 1\,|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}}$$

$$d = \frac{|-3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cong 1{,}3$$

Note que $1{,}3 < r = 5$.

Logo a reta é secante a circunferência.

Lista de atividades. (60min, até as 11:40)

Na sequência, vamos aplicar a seguinte lista de atividades para praticarem os conteúdos trabalhados em toda a aula.

Lista de atividades:

1) Obtenha o raio e o centro da circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

2) Consideremos a reta r de equação $x + y - 3 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$. Qual é a posição da reta r em relação à circunferência?

3) Determine o valor de w sabendo que a reta de equação $x - y + w = 0$ é

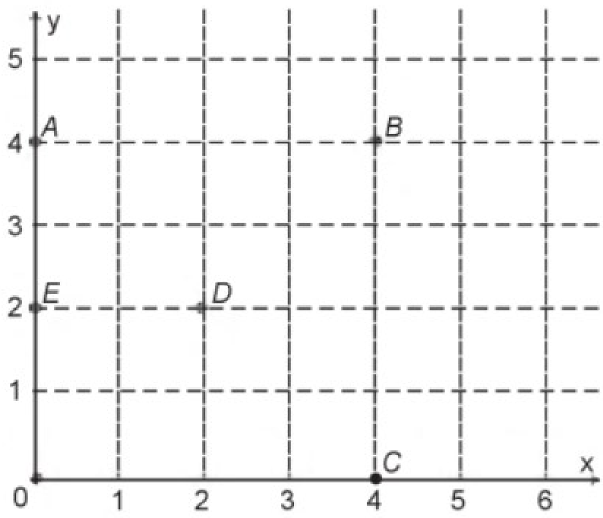
tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$.

4) (PUC-SP) O ponto $P(3, b)$ pertence à circunferência de centro no ponto $C(0, 3)$ e raio 5. Calculem o valor da coordenada b.

5) (ENEM 2018) Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.
Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é

a) 30.
b) 40.
c) 45.
d) 60.
e) 68.

6) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0 ; 4), B(4 ; 4), C(4 ; 0), D(2 ; 2) e E(0 ; 2).



a) $x = 0$
b) $y = 0$
c) $x2 + y2 = 16$

d) $x2 + (y - 2)2 = 4$
e) $(x - 2)2 + (y - 2)2 = 8$

Questão extra:

Caso haja tempo de sobra daremos mais um exercício para resolverem.

1) O valor de k que transforma a equação $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ na equação de uma circunferência de raio 7 é**:**
a) -4
b) 8
c) -8
d) 7
e) -5

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou na lousa.

Referências

CAMARGO, Cecilia Rosane Louzada Ramires. Jogos Matemáticos. *Talentos pedagógicos.* 2014. Disponível em: https://talentospedagogicos.blogspot.com/2014/03/jogos-matematicos.html. Acesso em: 01 mar. 2023.

DALBOSCO, Anderson Medeiros. Posições Relativas entre Retas 10 exercícios com Gabarito. *Exercícios Web*. 2016. Disponível em: https://exerciciosweb.com.br/matematica/posicoes-relativas-entre-retas-exercicios/. Acesso em: 01 de março de 2023.

ENEM 2018 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 24 março. 2023.

PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2009. Vol. 3.

PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2009. Vol. 2.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. "O que é a condição de existência de um triângulo?"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-a-condicao-existencia-um-triangulo.htm. Acesso em 08 de março de 2023.

Anexo I

Desigualdade triangular

Para garantir a existência de um triângulo qualquer de vértices ABC, o comprimento de um dos lados desse triângulo deve ser sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados, isto é,

$$d(A,B) < d(B,C) + d(A,C)$$
$$d(A,C) < d(B,C) + d(A,B)$$
$$d(B,C) < d(A,C) + d(A,B)$$

Sendo $d(A,B)$, $d(A,C)$ e $d(B,C)$ os comprimentos dos lados do triângulo.

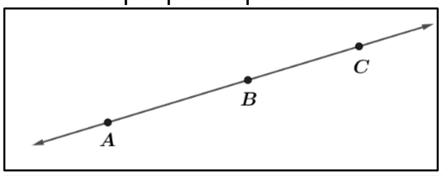
(RELEMBRANDO) Distância entre dois pontos no plano cartesiano

Dados dois pontos, $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a distância entre eles, que será indicada por $d(A,B)$, é a medida do segmento de reta de extremidades A e B . Podemos determinar essa distância pela fórmula

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

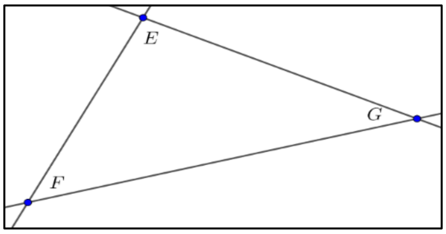
Definição – Condição de alinhamento de três pontos.

Dizemos que três pontos distintos estão alinhados, ou que três pontos são colineares, quando existe uma reta que passa pelos três.



A, B e C são três pontos alinhados. Nesse caso, não existe o triângulo ABC e temos:

$$d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$$



Os pontos E, F e G não são colineares, isto é, não estão alinhados. Entã existe o triângulo EFG, e, portanto, a medida de um lado é sempre meno que a soma das medidas dos outros dois.

Fonte: Autores (2023).

Exercícios - I

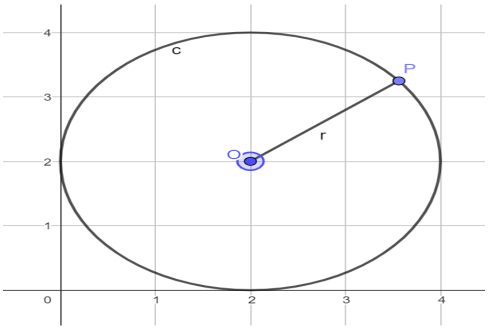
Verifique se os seguintes pontos são colineares.

$a) A(1,2)$, $B(5,2)$ e $C(6,2)$
$b) E(5,1)$, $F(3,3)$ e $G(0,4)$

Definição de Circunferência:

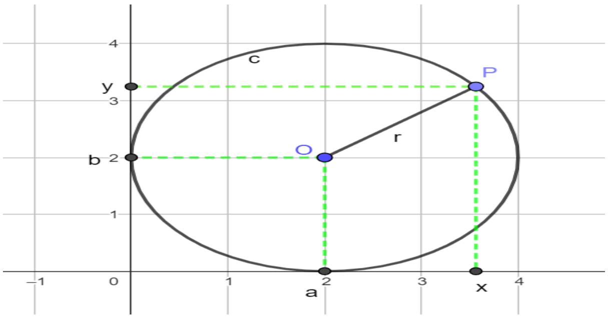
Uma circunferência com centro $O(a,b)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos $P(x,y)$ do plano cartesiano equidistantes de O, (equidistam uma distância r do ponto O). Geometricamente:

Figura 24: Ilustração de circunferência.



Fonte: Autores (2023).

Equação da Circunferência:
A equação é dada pela fórmula da distância entre dois pontos, esta distância é o raio da circunferência, o ponto de análise é dado é um ponto fixo, este é o centro.
Figura 25: Ilustração para a equação da circunferência.



Fonte: Autores (2023).

Deste modo, temos $O(a,b)$ e $P(x,y)$, devemos calcular a distância r entre estes dois pontos, deste modo:

$$D_{OP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Assim, essa equação é denominada de

Praticando:
Identifique o centro e o raio de cada circunferência no plano cartesiano.
f) $(x-2)^2 + (y)^2 = 36$
g) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$
h) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 144$

Equação geral da circunferência:
Esta equação é dada a partir da equação reduzida, simplesmente calculando os dois quadrados $(x-a)^2$ e $(y-b)^2$:
$(y-b)^2 = y^2 - 2by + b^2$
$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

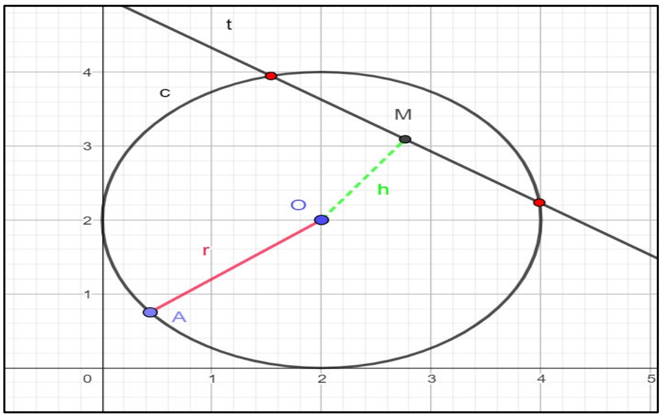
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Assim surge a equação **geral** ou **normal** da circunferência.

Exercícios II

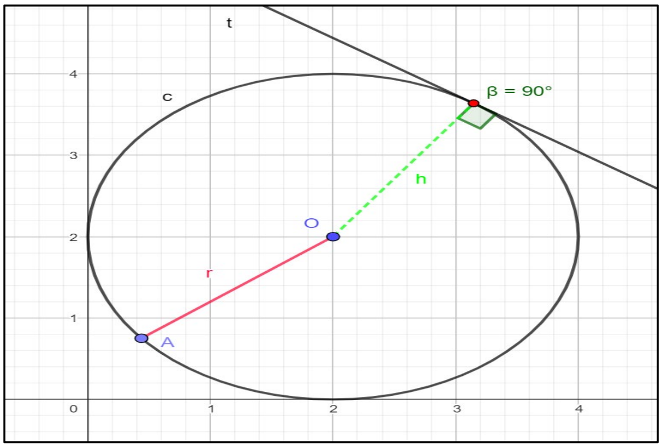
7) Determine a equação reduzida e a geral de uma circunferência com:
d) Centro no ponto $O(-3,1)$ e raio 3.
e) Centro no ponto $O(0,4)$ e raio 6.
f) Centro no ponto $A(1,-2)$ e que passa pelo ponto $P(2,3)$.

Posições relativas entre retas e circunferências:



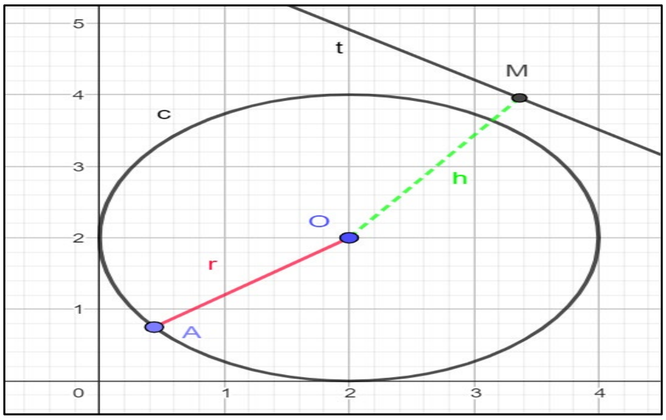
Primeiro Caso:
A reta t ser **secante** a circunferência:

Note que **a distância do centro até a reta (em verde)** é menor que o **raio da circunferência**



Segundo Caso:
A reta t ser **tangente** a circunferência:

Note que **a distância do centro até a reta (em verde)** igual ao **raio da circunferência (em**



Terceiro Caso:
A reta t ser **externa** a circunferência:

Note que **a distância do centro até a reta (em verde)** é maior que

Fórmula - Distância entre ponto e reta.
A distância d entre um ponto $O(x_0, y_0)$ e uma reta s de equação geral $ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplos:

4) Calcule a distância d entre o ponto $C(3,3)$ e a reta $s: x + y - 4 = 0$
5) Seja a circunferência C, $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$ e a reta $-x + 8 = y$, determine a posição desta reta em relação a circunferência.

6) Seja a circunferência C, $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ e a reta $2x + y - 1 = 0$, determine a posição desta reta em relação a circunferência.

Lista de atividades:

1) Obtenha o raio e o centro da circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

8) Consideremos a reta r de equação $x + y - 3 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$. Qual é a posição da reta r em relação à circunferência?

9) Determine o valor de w sabendo que a reta de equação $x - y + w = 0$ é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$.

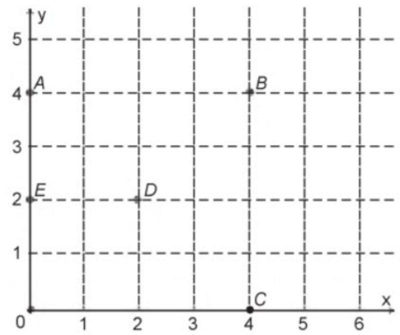
10) PUC-SP) O ponto $P(3, b)$ pertence à circunferência de centro no ponto $C(0, 3)$ e raio 5. Calculem o valor da coordenada b.

11) (ENEM 2018) Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.

Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é

a)30. b) 40. c) 45. d) 60. e) 68.

12) (ENEM 2018) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: $A(0,4), B(4,4), C(4,0), D(2,2)$ e $E(0,2)$.



a) $x = 0$
b) $y = 0$
c) $x2 + y2 = 16$
d) $x2 + (y - 2)2 = 4$
e) $(x - 2)2 + (y - 2)2 = 8$

Anexo II

Exercícios - I

Dados os seguintes pontos são colineares.

$a) A(1,2),\ B(5,2) e\ C(6,2)$

$d(A, C) = \sqrt{(6-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 0} = \sqrt{25} = 5.$

$d(A, B) = \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 0} = \sqrt{16} = 4.$

$d(B, C) = \sqrt{(6-5)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$

Então:
$d(A,C) = 5 = 4 + 1 = d(A,B) + d(B,C)$.
Assim A, B e C são colineares.

$b) E(5,1)$, $F(3,3)$ e $G(0,4)$
$d(E,G) = \sqrt{(0-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$.
$d(E,F) = \sqrt{(3-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$.
$d(F,G) = \sqrt{(0-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.
Então:
$d(E,G) = \sqrt{34} \neq \sqrt{8} + \sqrt{10} = d(E,F) + d(F,G)$.
Portanto E, F e G formam um triângulo.

Exercícios II

1) Determine a equação reduzida e a geral de uma circunferência com:

a) Centro no ponto $O(-3,1)$ e raio 3.

$$D_{OP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = 3$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$(x+3)(x+3) + (y-1)(y-1) = 9$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 9$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$$

b) Centro no ponto $O(0,4)$ e raio 6.

$$D_{OP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = 6$$

$$(x)^2 + (y-4)^2 = 36$$

$$x^2 + (y-4)(y-4) = 36$$

$$x^2 + y^2 - 8y + 16 - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8y - 20 = 0$$

c) Centro no ponto $A(1,\ -2)$ e que passa pelo ponto $P(2,\ 3)$.

Primeiro calculamos a distância de A até P:

$$D_{AP} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$D_{AP} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{26}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{26}$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=26$$
$$x^2-2x+1+y^2+4y+4-26=0$$
$$x^2+y^2-2x+4y-21=0$$

Lista de atividades

1) Obtenha o raio e o centro da circunferência $x^2+y^2+6x-4y-12=0$

R: Igualando a equação com a forma geral:

$$x^2+6x+y^2-4y-12=x^2+\ y^2 – \ 2ax \ – \ 2by \ + \ a^2+\ b^2 – \ r^2$$

Assim temos:

$$x^2 = \ x^2$$
$$y^2 = \ y^2$$
$$6x = \ – \ 2ax \ \Rightarrow a=-3$$
$$-4y = \ -2by \ \Rightarrow b=2$$
$$-12 = \ a^2+\ b^2 – \ r^2 \Rightarrow$$
$$-12=(-3)^2+2^2-r^2 \ \Rightarrow$$
$$-12=9+4-r^2 \ \Rightarrow$$
$$-12 = \ 12-r^2 \ \Rightarrow$$
$$-24 = \ -r^2 \ \Rightarrow$$
$$24 = \ r^2 \ \Rightarrow$$
$$r=\pm\sqrt{24} \ \Rightarrow r=\sqrt{24}$$

2)Consideremos a reta r de equação $x+y-3=0$ e a circunferência de equação $x^2+y^2 – 2x – 2y-3=0$. Qual é a posição da reta r em relação à circunferência?

R: Igualando a equação com a forma geral:

$$x^2+y^2-2x-2y-3=x^2+\ y^2 – \ 2ax \ – \ 2by \ + \ a^2+\ b^2 – \ r^2$$

Assim temos:

$$x^2 = \ x^2$$
$$y^2 = \ y^2$$
$$-2x = \ – \ 2ax \ \Rightarrow a=-1$$
$$-2y = \ -2by \ \Rightarrow b=-1$$
$$-3 = \ a^2+\ b^2 – \ r^2 \Rightarrow$$
$$-3=(-1)^2+(-1)^2-r^2 \ \Rightarrow$$
$$-3=1+1-r^2 \ \Rightarrow$$
$$-3 = \ 2-r^2 \ \Rightarrow$$
$$-1 = \ -r^2 \ \Rightarrow$$
$$1 = \ r^2 \ \Rightarrow$$
$$r=\pm\sqrt{1} \ \Rightarrow r=1$$
$$O(x_0,y_0)=(-1,-1)$$

Aplicando na fórmula da distância entre reta e circunferência temos:

$$d=\frac{|1(-1)+1(-1)-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-1-1-3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-5|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

3) Determine o valor de w sabendo que a reta de equação $x - y + w = 0$ é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$.

Sabemos que o raio da circunferência é 3, e temos:

$$x^2 + y^2 - 9 = x - y + w \Rightarrow$$
$$x^2 + x + y^2 + y - 9 - w = 0 \Rightarrow$$
$$-9 - w = 0^2 + 0^2 + 3^2 \Rightarrow$$
$$-9 - w = 9 \Rightarrow$$
$$-w = 18 \Rightarrow$$
$$w = -18 \Rightarrow$$

4) O valor de k que transforma a equação x² + y² – 8x + 10y + k = 0 na equação de uma circunferência de raio 7 é**:**

f) -4
g) 8
h) -8
i) 7
j) -5

R: Igualando a equação com a forma geral:

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2$$

Assim temos:

$$x^2 = x^2$$
$$y^2 = y^2$$
$$-8x = -2ax \Rightarrow a = 4$$
$$10y = -2by \Rightarrow b = -5$$
$$k = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow$$
$$k = 4^2 + (-5)^2 - 7^2 \Rightarrow$$
$$k = 16 + 25 - 49 \Rightarrow$$
$$k = 41 - 49 \Rightarrow$$
$$k = 8$$

5) (PUC-SP) O ponto $P(3, b)$ pertence à circunferência de centro no ponto $C(0, 3)$ e raio 5. Calculem o valor da coordenada b.

$$D_{CP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$
$$\sqrt{(3-0)^2 + (b-3)^2} = 5$$
$$\sqrt{3^2 + (b-3)^2} = 5$$
$$\sqrt{9 + b^2 - 6b + 9} = 5$$
$$\sqrt{b^2 - 6b + 18} = 5$$
$$b^2 - 6b + 18 = 25$$
$$b^2 - 6b - 7 = 0$$

$$b = \frac{-(-6) \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \cdot 3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{2})}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

6) (ENEM 2018) Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.

Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é

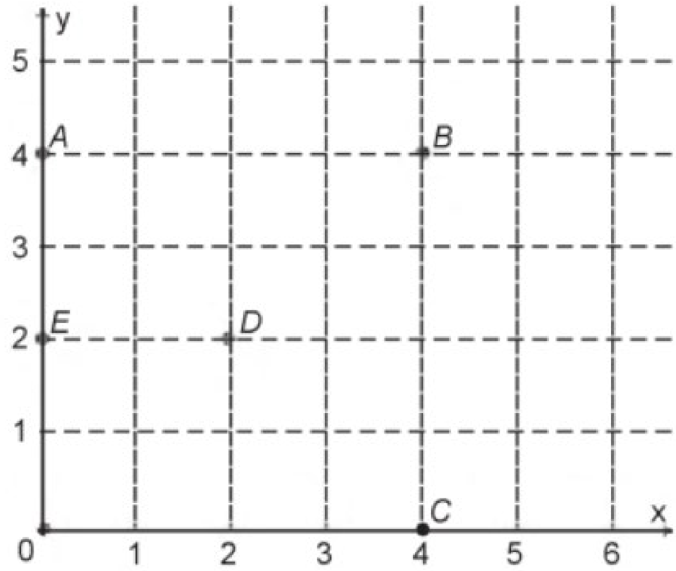
f) 30.
g) 40.
h) 45.
i) 60.
j) 68.

Dado um ponto P genérico de coordenadas (x,y), devemos encontrar as distancias PA e PB que satisfaçam a condição PA = 2PB;

$$D(P,A) = D2(P,B)$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 2x\sqrt{(x-30)^2 + (y-0)^2}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2x\sqrt{x^2 - 60x + 900 + y^2}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2x\sqrt{x^2 - 60x + 900 + y^2}$$
$$x^2 + y^2 = 4x^2 - 240x + 3600 + 4y^2$$
$$3x^2 - 240x + 3600 + 3y^2 = 0$$
$$x^2 - 80x + 1600 + y^2 = 0$$
$$x^2 - 80x + 1600 + y^2 = 400$$
$$(x-40)^2 + (y-0)^2 = 20^2$$
$$C = (40,0)$$
$$r = 20$$

Todos os pontos da circunferência satisfazem a condição PA = 2PB e a maior distância possível entre os dois pontos de uma circunferência é o diâmetro formado pelos pontos B1 e B2.

7) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando “tiros”, seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0 ; 4), B(4 ; 4), C(4 ; 0), D(2 ; 2) e E(0 ; 2).



f) $x = 0$
g) $y = 0$
h) $x2 + y2 = 16$
i) $x2 + (y - 2)2 = 4$
j) $(x - 2)2 + (y - 2)2 = 8$

Resposta e) centro D raio $R^2 = 2^2 + 2^2$ pois é a equação que mais tem contém pontos.

3.5.1. **Relatório – 15/04/2023**

Relatório 5 - Sala A205

No dia quinze de abril de 2023, foi realizado o quinto encontro do Promat, contando com a presença de 19 alunos em um dia ensolarado. O tema da aula foi ponto colineares, equação geral e reduzida da circunferência e posições relativas entre retas e circunferências. A aula teve início as oito horas e cinco minutos.

Iniciamos a aula com a correção de duas questões da lista de atividades do último encontro. Observamos que os alunos não haviam sequer tentado resolver essas questões. Havíamos separado um tempo de 20 minutos para esta correção, e terminamos de apresentá-la às 08:22 sem manifestações de dúvidas por parte dos alunos. Partimos então para o conteúdo de pontos colineares, apresentando a ideia de desigualdade triangular com o auxílio do *software Geogebra.* Os alunos se mostraram participativos nos questionamentos sobre a condição de existência de um triângulo. Na sequência, mostramos que essa mesma condição de existência pode ser usada para mostrar que três pontos são colineares. Apresentamos um modo de concluir a condição de alinhamento entre três pontos usando a distância entre dois pontos.

Alguns exercícios de fixação foram propostos e notamos que muitos alunos conseguiram resolvê-los. No entanto, algumas dúvidas surgiram e demandaram um tempo maior de atenção. Tentamos então esclarecer tais dúvidas durante a resolução dos exercícios na lousa.

Seguimos para a introdução da equação reduzida da circunferência, explicando sua definição e o modo como pode ser obtida através da fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano. Apresentamos um exemplo de como determinar o centro e raio a partir da equação, questionando os alunos sobre três exercícios que poderiam ser resolvidos oralmente por meio da leitura da equação. Percebemos que a maioria dos alunos compreendeu o conceito, pois respondiam prontamente nossos questionamentos. Após essa dinâmica, os alunos foram liberados para o intervalo.

Após o retorno parcial dos alunos, que logo retornaram por completo, voltamos a abordar o conteúdo. Apresentamos no quadro a resposta fornecida pelos alunos anteriormente, o que nos fez concluir que os alunos haviam compreendido a equação reduzida da circunferência. Seguimos apresentando a equação geral da circunferência e trabalhando dois exemplos, ilustrando também uma maneira de se obter uma equação geral da reta a partir da reduzida e vice-versa. Três exercícios foram propostos aos alunos e, conforme eles praticavam, os estagiários percorriam a sala de aula esclarecendo dúvidas. Concluímos esta parte com a resolução em lousa dos três exercícios, o que acabou levando mais tempo do que o programado.

O último conteúdo do dia foi de posição relativa entre reta e circunferência no plano cartesiano. Explicamos brevemente cada caso de posição possível com o auxílio de gráficos e sobre como determinar qual caso ocorre observando apenas as equações. Por haver pouco tempo, mostramos em lousa a resolução de dois exemplos, mas deixamos metade do segundo para os alunos praticarem o uso da fórmula da distância de um ponto a uma reta.

Depois de dez minutos, vendo que diversos alunos haviam resolvido, um dos estagiários apresentou a resolução completa. Após isto, explicamos que a lista de atividades presente na folha com os conteúdos entregue no início da aula, ficaria para praticarem em casa. O encontro foi finalizado as 11h40min.

3.6. **Plano de aula – 6º Encontro 29 abril 2023.**

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Trigonometria na circunferência, ângulos notáveis e unidades de medidas radianos e graus.

Objetivo geral: Facilitar a compreensão de arcos, ângulos e suas unidades de medida, desenvolver a aplicação das razões trigonométricas no triângulo retângulo na circunferência e compreender as relações de seno cosseno e tangente para os ângulos notáveis.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Compreender os conceitos básicos de arcos, ângulos e suas medidas;
- Conhecer as unidades de medida de ângulos e seus respectivos símbolos;
- Compreender o conceito de seno, cosseno e tangente de um ângulo;
- Conhecer os ângulos notáveis agudos da Trigonometria;
- Resolver problemas envolvendo os conceitos apresentados.

Tempo de execução: Uma aula com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook*, projetor multimídia, *Power Point* e folhas de papel sulfite.

Encaminhamento metodológico:

Realizaremos essa aula com auxílio do projetor presente na sala, projetando lâminas com definições, exemplos e outras informações referentes ao conteúdo. Os alunos serão organizados em grupos de quatro integrantes, mas com liberdade para se sentarem da maneira que preferirem.

O referencial metodológico que será adotado nesta aula será o da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que adquiriram no ensino básico, incentivando a pesquisa e o uso de diferentes métodos e estratégias de resolução.

Utilizaremos os problemas matemáticos de maneira diversificada, para iniciar determinando conteúdo ou para praticar. Será disponibilizado uma folha para cada aluno contendo exercícios, definições e explicações sobre os conceitos que serão trabalhados em aula.

1° Momento Correção de atividades da aula passada. (10 min, até 08:10)

No primeiro momento, realizaremos a correção de questões que ficaram sem solução na aula passada. Um estagiário resolverá as questões no quadro enquanto convida os alunos a participarem do desenvolvimento da correção.

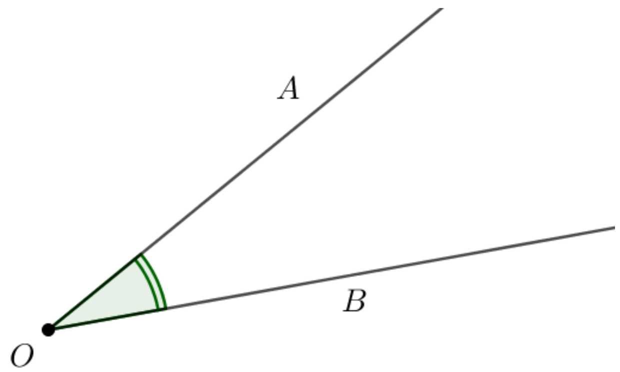
2° Momento Apresentação dos conceitos básicos de arcos e ângulos, suas medidas e unidades. (50 min, até 09:00)

Começaremos informando que abordaremos o estudo da teoria da circunferência, relembrando os alunos de conceitos básicos como ângulos, arcos e suas unidades de medidas. Utilizaremos lâminas do *Power Point* para tornar a apresentação mais dinâmica e ilustrativa.

Definição – Ângulos

Na matemática, consideramos ângulo a figura geométrica formada por duas semirretas de mesma origem.

Figura 26: Ilustração de ângulo.



Fonte: Autores (2023).

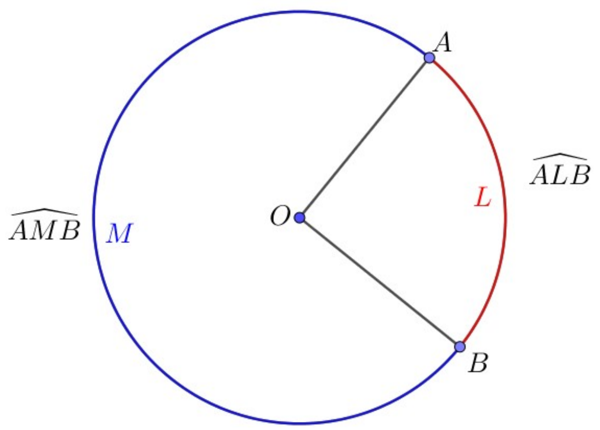
Indicaremos o ângulo da figura abaixo como $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$ ou simplesmente $\hat{O}$. As semirretas $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{BO}$ são os lados do ângulo e o ponto O é o **vértice** do ângulo.

Apresentaremos uma circunferência numa lâmina do *Power Point* com um ângulo formado por segmentos AO e BO, com vértice no centro O. Aproveitaremos essa imagem para indicar $\hat{O}$ como o ângulo central dessa circunferência e determinar o conceito de arco da circunferência.

Definição – Arcos

Definimos como arcos de uma circunferência de centro O, as partes delimitadas da circunferência pelos pontos distintos A e B. Esses arcos possuem medidas de comprimento L e M. Representamos os arcos de medidas L e M, respectivamente, como $\widehat{ALB}$ e $\widehat{AMB}$.

Figura 27: Arco em uma circunferência.



Fonte: Autores (2023).

O ângulo de vértice em O e com lados dados pelos segmentos que ligam os pontos A e B com este vértice é chamado de **ângulo central** $(A\hat{O}B)$. A medida **angular** do arco $\widehat{ALB}$ corresponde à medida do ângulo central, ou seja, $\left(m(\widehat{ALB}) = m(A\hat{O}B)\right)$. Essa medida angular do arco pode ser representada pelas unidades: **grau** e **radiano**, a serem detalhadas a seguir.

Posteriormente vamos falar sobre um breve histórico sobre o início da medida angular.

Breve momento histórico

Antigamente, o sábio grego **Hiparco de Nicéia** $(180\ a.c\ a\ 125\ a.c)$, acreditando que o Sol, a Lua e os planetas se movimentavam-se sobre uma circunferência cujo centro era a Terra (geocentrismo), Hiparco decide medir a circunferência e seus arcos. Assim, tendo como inspiração o calendário dos babilônios (formado por 360 dias), ele decide dividir a circunferência em 360 partes iguais.

A medida da abertura do ângulo correspondente a uma dessas partes da circunferência dividida em 360 partes iguais $\left(\frac{1}{360}\ de\ uma\ volta\ completa\right)$, foi chamada de grau, e essa medida foi indicada por $1°$.

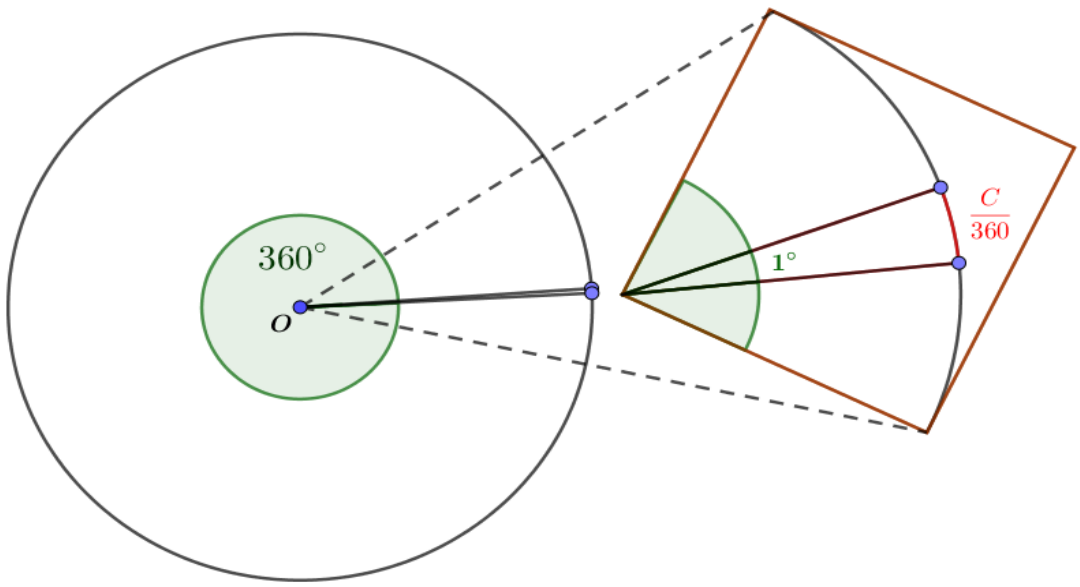
Em seguida, apresentaremos que as unidades de medida dos ângulos e dos arcos são o grau e o radiano. Nosso objetivo é que os alunos compreendam essas unidades, aplicando esses conceitos ao transformar uma unidade na outra.

Unidades de medida dos ângulos e arcos

O arco de um grau $(1°)$ é aquele cujo comprimento é igual a $\frac{1}{360}$ do comprimento da circunferência. O arco de uma volta completa corresponde, portanto, a $C = 360°$.

$$1° = \frac{C}{360}\ (C\text{: comprimento da circunferência})$$

Figura 28: Arco de um grau em uma circunferência.

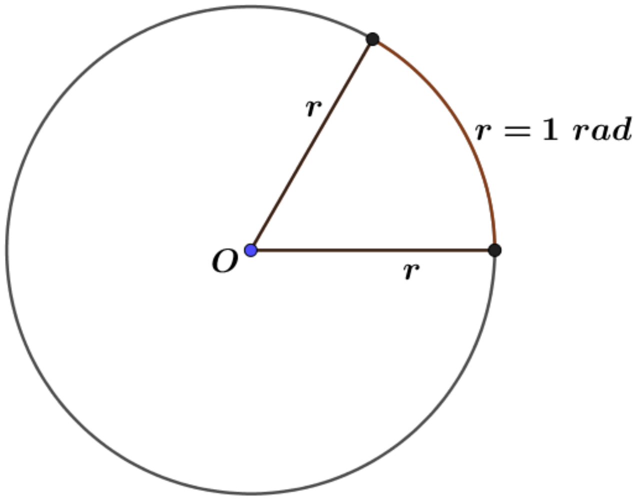


Fonte: Autores (2023).

O arco de um radiano (1 rad) é aquele cujo comprimento é igual ao raio (r) da circunferência que está contido.

$$\widehat{ArB} = r = 1\,rad$$

Figura 29: Ilustração de radianos.



Fonte: Autores (2023).

Conhecendo que o arco de **volta completa da circunferência** tem comprimento

$$C = diametro \cdot \pi = 2r\pi$$

Como esse comprimento dado em radiando equivale em graus a $360°$, temos a seguinte correspondência entre graus e radianos:

$360°\ \leftrightarrow 2r\pi$ ou $2\pi\,rad.$

De modo a ajudar os alunos a compreenderem esses conceitos, iremos apresentar os seguintes exemplos nos *slides* que trabalham com a equivalência entre graus e radianos.

Resolveremos o primeiro exemplo no quadro e deixaremos a cargo dos alunos responderem o segundo. Depois de cinco minutos, convidaremos um aluno para responder no quadro.

Exemplos

1º Determine, em radianos, a medida de um arco de $45°$.

$$\begin{array}{ccc} 360° & ----- & 2\pi \ rad \\ 45° & ----- & x \ rad \end{array}$$

Que implica em $x = \frac{45 \cdot 2\pi}{360} = \frac{45 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{4} r \ ou \ \frac{\pi}{4} rad.$

Assim, $45° = \frac{\pi}{4} rad$

2º Dado um arco de $\frac{11}{6}\pi \ rad$, determine a medida deste arco em graus.

$$\begin{array}{ccc} 360° & ----- & 2\pi \, rad \\ x & ----- & \dfrac{11}{6}\pi \, rad \end{array}$$

$$x = \frac{360 \cdot \frac{11}{6}\pi}{2\pi} = \frac{60 \cdot 11}{2} = 30 \cdot 11 = 330°$$

Na sequência, vamos propor alguns exercícios de equivalência entre essas duas unidades de medida. Essas atividades foram retiradas do livro Matemática (2011, p.127) e foram escolhidas por serem de simples transformação dessas unidades de medida. Os estagiários percorrerão a sala atendendo eventuais dúvidas.

Exercícios – I

1-Converta em graus as medidas dadas em radianos:

$a) \ \frac{4\pi}{3} rad. \quad b) \ \frac{7\pi}{6} \ rad \quad c) \ \frac{\pi}{8} \ rad$

2-Converta em radianos as medidas e graus:

$a) \ 30 \ ° \quad b) \ 120° \quad c) \ 315°$

3° Momento Medida do ângulo central em radianos. (40 min, até 09:40)

Em seguida, vamos mostrar no quadro como calcular a medição em radianos do ângulo central e do arco da circunferência. Ao considerar uma circunferência de centro em O, vamos partir da fórmula do comprimento do arco da circunferência completa

$$C = d\pi = 2r\pi.$$

Usando da proporcionalidade, encontramos a medida do ângulo central como a razão entre o comprimento do arco e o comprimento do raio da circunferência em que está imposto. Importante comentar que ambos devem estar na mesma unidade de medida. Seja L o comprimento de um arco qualquer sobre a circunferência, então temos que:

$$\begin{matrix} 2\pi r\ umc & ----- & 2\pi\ rad \\ L\ umc & ----- & \alpha \end{matrix},$$

onde umc é a unidade de medida de comprimento e α a medida do ângulo central, donde

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot L}{2\pi \cdot r} = \frac{L}{r}\ rad.$$

Mas como já discutido anteriormente, a medida angular do ângulo central é igual a medida angular do arco correspondente, e neste caso, essa medida angular está sendo representada em rad. Logo,

$$\widehat{ALB} = \frac{L}{r}\ rad.$$

Definição – Medida do ângulo central ou medida do arco da circunferência.

Considere uma circunferência de centro em O, o ângulo central $A\hat{O}B$ e o arco correspondente $\widehat{ALB}$ de comprimento L (Figura 2 - Definição – Arcos). Denomina-se **medida em radianos do ângulo central** como a divisão entre o comprimento do arco e o comprimento do raio da circunferência:

$$m(A\hat{O}B) = \frac{2\pi \cdot L}{2\pi \cdot r} = \frac{L}{r}\ rad.$$

Como a medida angular do ângulo central é igual a **medida angular do arco** $\widehat{ALB}$, temos que

$$m(\widehat{ALB}) = \frac{2\pi \cdot L}{2\pi \cdot r} = \frac{L}{r}\ rad.$$

Observação: Essas medidas angulares devem estar na mesma unidade de medida, no exemplo acima foi escolhido o rad.

Em seguida, vamos apresentar o seguinte exemplo de questão para observarem a aplicação do conceito. Essa apresentação será dirigida por um dos estagiários, logo após daremos os seguintes exercícios para praticarem o conteúdo estudado até esse momento. O exercício um foi retirado do livro Matemática (2011, p.127), e o outro é uma questão de vestibular.

Exemplo:

1-Determine a medida em radianos de um arco $\widehat{AB}$ de $3\ cm$ numa circunferência de raio $2\ cm$.

$$m\left(\widehat{AB}\right) = \frac{3\ cm}{2\ cm} = 1{,}5\ rad$$

Exercícios - II

1- Em cada caso a seguir, são dados o comprimento L do arco $\widehat{AB}$ e o raio r da circunferência. Calcule a medida do arco em radianos.

a) $L = 0{,}5\ m;\ r = 0{,}25\ m$

b) $L = 2\ cm;\ r = 0{,}04\ m$

c) $L = 6\ cm;\ r = 2\ cm$

2- (UEM – PR) Uma pista de atletismo tem forma circular e seu diâmetro mede $80\ m$. Um atleta treinando nessa pista deseja correr $10\ km$ diariamente. Determine o número mínimo de voltas completas que ele deve dar nessa pista a cada dia.

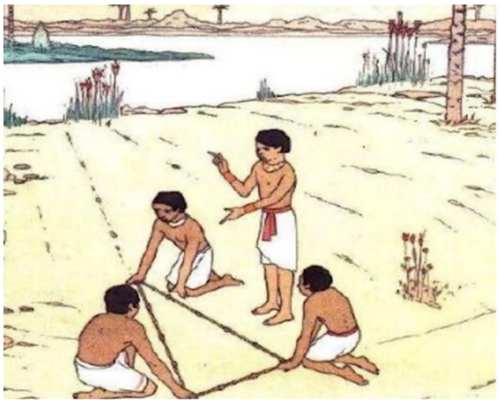
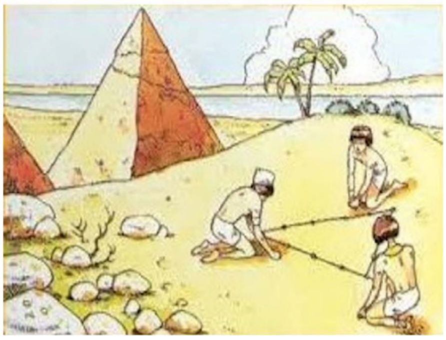
4° Momento Intervalo (20 min, até 10:00)

5° Momento Definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo. (50 min, até 10:50)

Para estudar as razões trigonométricas na circunferência, precisamos primeiramente defini-las no triângulo retângulo. O triângulo retângulo tem grande importância na história da matemática, permitindo sobretudo o cálculo de distâncias.

Contexto histórico do triângulo retângulo.

No Egito antigo existia os agrimensores, responsáveis por remarcar os marcos que delimitavam os campos de plantação na margem do rio Nilo, e para isso usavam uma corda com doze nós, igualmente espaçados, e que quando esticada formava um triangulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Com essas medidas, podiam calcular a distância e até a área para demarcação de fronteiras. (PAIVA, Manoel. 2009, p. 31)

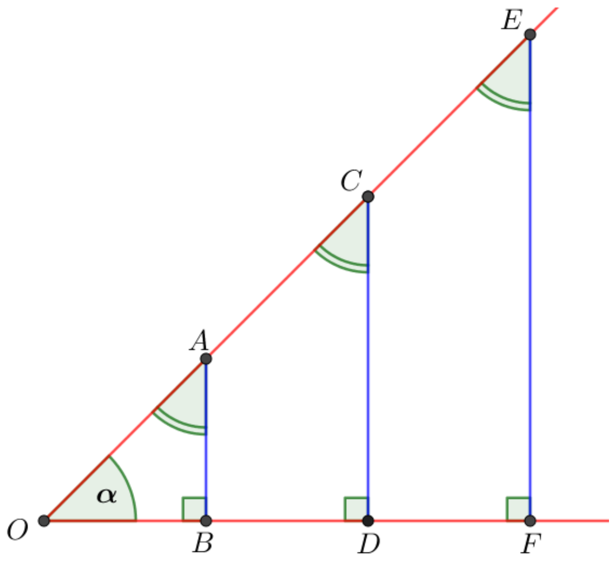



Fonte: Central Virtual de Recursos Didáticos (2016).

Neste momento, mostraremos nos slides do *Power Point* que todos os triângulos retângulos com ângulo agudo de medida α são semelhantes entre si.

Segundo Paiva (2009, p.31), dizemos que dois triângulos são semelhantes quando os três ângulos internos de um deles são, respectivamente, congruentes (iguais) aos três ângulos internos do outro. Como consequência, a medida de lados correspondentes desses dois triângulos são proporcionais.

Da semelhança entre os triângulos AOB, OCD e OEF na figura abaixo, obtemos:



Fonte: Autores (2023).

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = R_1.$$

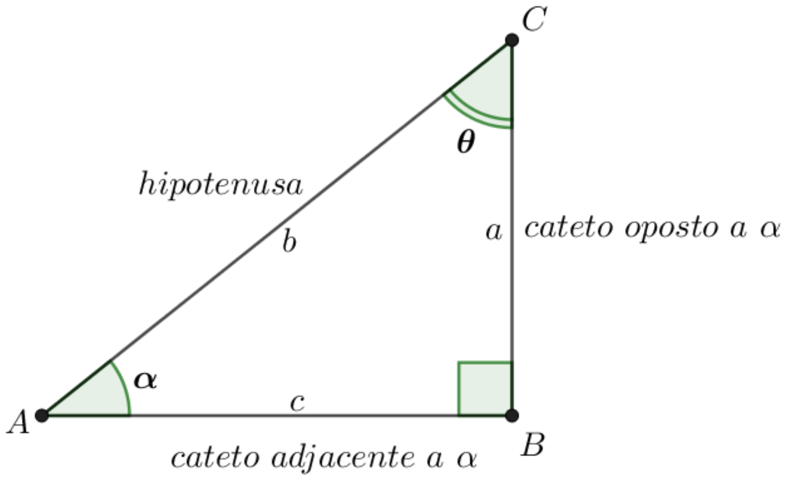
$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = R_2.$$

$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = R_3.$$

Essas constantes R_1, R_2 e R_3 são as razões trigonométricas, sendo chamadas respectivamente de seno de α $(sen\ \alpha)$, cosseno de α $(\cos \alpha)$ e tangente de α $(tg\ \alpha)$. Por conta dessas razões serem sempre as mesmas em quaisquer triângulos retângulos semelhantes, podemos definir:

Definição – Seno, Cosseno e Tangente no triângulo retângulo.

Considerando um triângulo retângulo ABC e escolhendo um ângulo interno α ($B\hat{A}C$ ou $A\hat{C}B$), dizemos que o lado do triangulo oposto à α é o **cateto oposto** e aquele ao seu lado é o **cateto adjacente**. O lado de maior comprimento é a **hipotenusa**.



Fonte: autores (2023)

Chamamos de razões trigonométricas o seno de α $(sen\,\alpha)$, cosseno de α $(\cos\alpha)$ e tangente de α $(tg\ \alpha)$. Cada uma dessas três razões relacionam as medidas de dois lados de um triângulo retângulo com a medida de seus ângulos (α).

$$sen\ (\alpha) = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\ (\alpha) = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{c}{b}$$

$$tg\ (\alpha) = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ do\ cateto\ adjacente} = \frac{a}{c}$$

A partir de um determinado ângulo α, teremos sempre as mesmas três razões para qualquer outro triângulo retângulo semelhante.

Relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo.

Dado um ângulo agudo $(menor\ que\ 90°)$ de medida α, tem-se que $tg\ (\alpha) = \frac{sen\ (\alpha)}{\cos\ (\alpha)}$.

Em seguida, com o objetivo de desenvolver a compreensão desses conceitos, vamos entregar **dois transferidores** e **duas réguas graduadas para cada grupo** de alunos e pediremos que calculem o seno, cosseno e tangente dos ângulos do quadro a seguir. Essas questões foram escolhidas para que os discentes percebam, que apesar das razões serem as mesmas, independentemente do tamanho dos lados do triângulo, ao terem ângulos distintos essas razões se alteram.

Exercícios - III

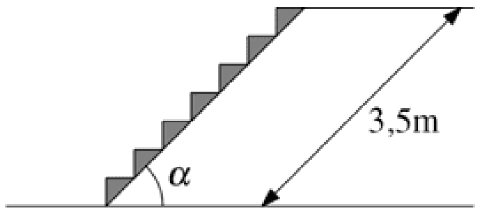
1- Com o auxílio de régua graduada e do transferidor, calcule os valores aproximados de:

a) $sen\ (60°)$, $\cos\ (60°)$ e $tg\ (60°)$.

b) $sen\ (30°)$, $\cos\ (30°)$ e $tg\ (30°)$.

c) $sen\ (50°)$, $\cos\ (50°)$ e $tg\ (50°)$.

2- (UFS) Sobre uma rampa plana de 3,5m de comprimento e inclinação α, como mostra a figura, será construída uma escada com 7 degraus, todos de mesma altura.



Fonte: UFS (2007)

Se $sen\ (\alpha) = \frac{4}{5}$, então a altura de cada degrau, em cm, é:

a) 20. b) 25. c) 30. d) 35. e) 40

5° Momento Ângulos notáveis (50 min, até 11:40)

Antes de finalizar a aula, vamos definir os ângulos notáveis de $30°$, $45°$ e $60°$, explicando que esses ângulos recebem essa classificação por conta da frequência com que aparecem na maioria dos estudos da Trigonometria. Além disso, esses ângulos são conhecidos pela facilidade de serem demonstrados.

Na próxima aula, aplicaremos o conceito de trigonometria do triangulo retângulo na circunferência unitária e será apresentado ângulos notáveis em outros quadrantes da circunferência.

Por conta do tempo, vamos demonstrar esses ângulos usando as lâminas do *Power Point.* As informações principais sobre esses ângulos foram retiradas do livro Matemática Paiva (2009, p.36-37).

Ângulo de 45°

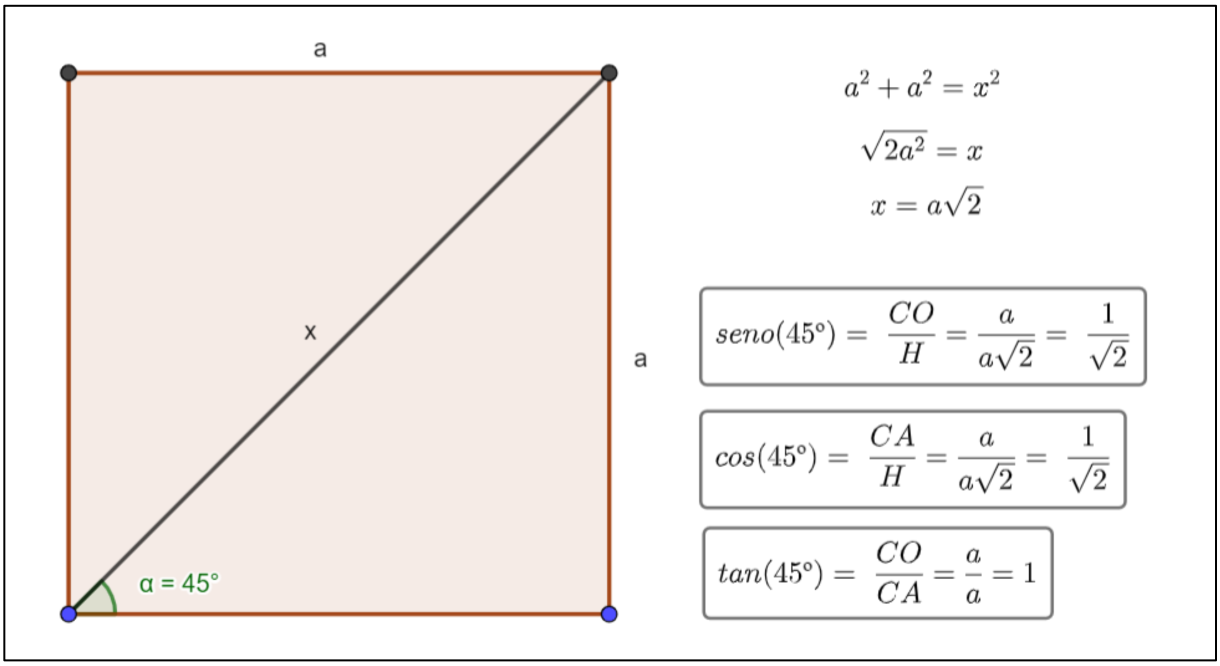
Um quadrado é formado por quatro lados iguais (a) e por quatro ângulos internos de 90° cada. A medida da diagonal desse quadrado é dada por $a\sqrt{2}$, e cada ângulo interno será dividido ao meio por essa diagonal, então temos dois ângulos de 45°.

$$sen\ (45°) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ (45°) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ (45°) = \frac{a}{a} = 1$$

Figura 30: Ilustração das medidas trigonométricas do angulo de 45º.



Fonte: Autores (2023).

Ângulos de 30° e 60°.

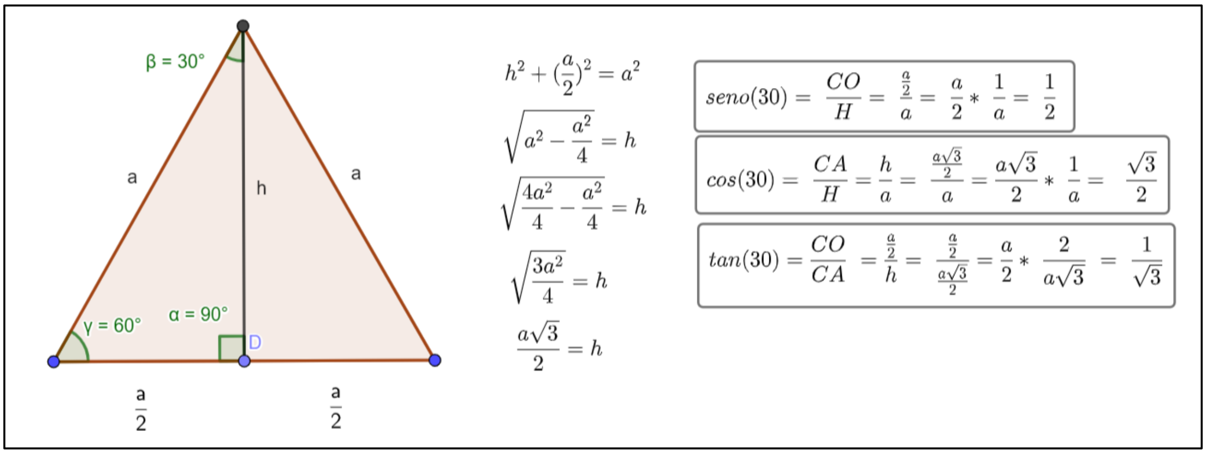
Para estudo desses ângulos, usamos um triângulo equilátero de lado a e altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Uma propriedade desse triângulo é ter a altura igual a bissetriz interna e mediana. Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°, temos:

$$sen\ (30°) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30°) = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ (30°) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Figura 31: Ilustração das medidas trigonométricas do ângulo de 30º.



Fonte: Autores (2023).

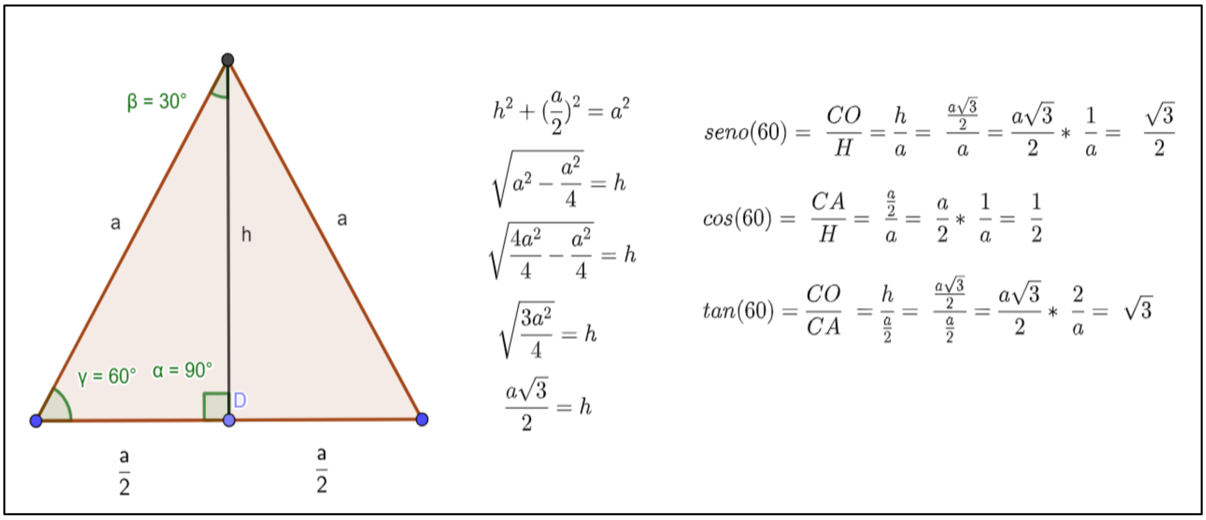
E para o ângulo de 60° teremos

$$sen\ (60°) = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\ (60°) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ (60°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Figura 32: Ilustração das medidas trigonométricas do ângulo de 60º.



Fonte: Autores (2023).

Podemos então montar a seguinte tabela de valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis:

Quadro 1: Ângulos notáveis.

Quadro dos ângulos notáveis			
	$30°$	$45°$	$60°$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Autores (2023)

Aproveitaremos esse momento para comentar sobre a canção utilizada para ajudar lembra essa sequência de valores. É preciso avisá-los que a ordem mostrada na tabela segue exatamente a música e deve ser considerada, vamos apresentar um vídeo no *YouTube* da música.

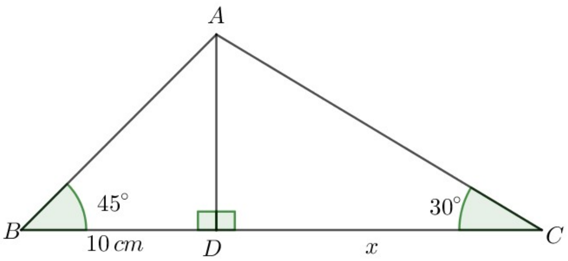
Em seguida, vamos deixar três questões como exercícios para resolverem até o final da aula sobre esses ângulos.

Canção do seno, cosseno e tangente.
Um dois três
Três dois um
Tudo sobre dois
Não se esqueça da raíz, do três e do dois
A tangente é diferente veja que legal
Raíz de três sobre três
Um
Raíz de três

Esses exercícios foram retirados do Livro Matemática Paiva (2009, p.37-38) e escolhidos por serem de simples aplicação dos ângulos notáveis, mas também por desenvolverem a visão dos estudantes sobre o triangulo retângulo. Daremos até o final da aula para resolverem essas questões, que serão corrigidas na próxima aula.

Exercícios- IV

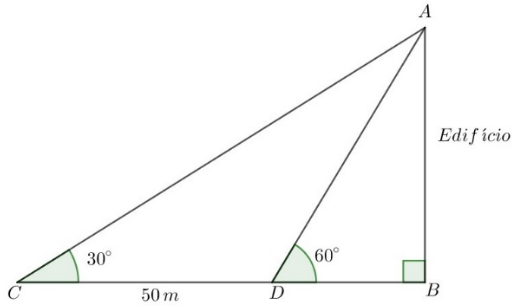
1) Determine a medida x da figura:



Fonte: Autores (2022)

2- A torre Eiffel tem sua base em um piso plano e horizontal. De um ponto A desse piso, distante 108√3 m do centro da base, vê-se o ponto vais alto da torre sob um ângulo de 60° com o piso. calcule a altura da torre.

3- (Adaptação) A base de um edifício está localizado em um terreno plano e horizontal. Para medir a altura desse edifício, um engenheiro fixou-se em um ponto do terreno e mirou o topo do prédio sob um ângulo de 30° com o solo. Depois, andou 50 metros em direção ao prédio e mirou novamente seu topo, mas agora, sob um ângulo de 60°. Desconsiderando a altura do engenheiro, calcule a altura do edifício.

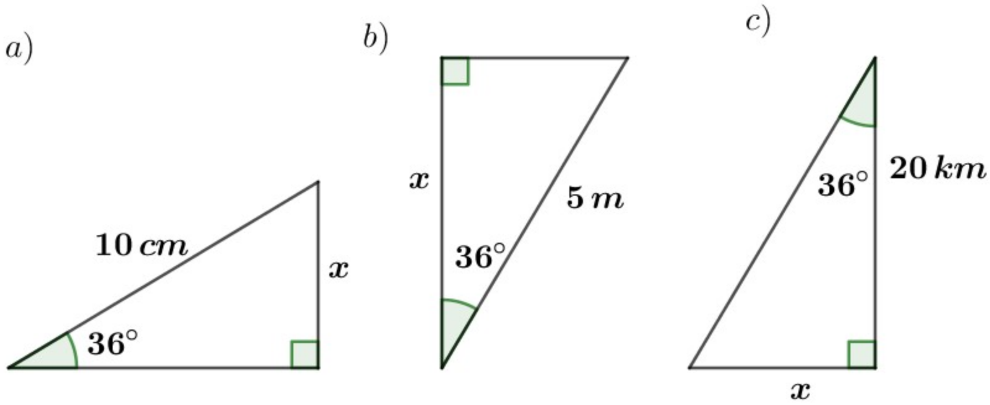


Fonte: Autores (2023)

Deixaremos a seguinte questão no slide como questão extra no caso de terminarem as atividades e ainda restar tempo até o final da aula.

Questão extra

(Modificado) Sabendo que $sen\ (36°) = 0{,}58$, $\cos(36°) = 0{,}8$ e $tg\ (36°) = 0{,}72$, calcular o valor de x em cada figura.



Fonte: Autores (2023).

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou no quadro negro.

Referências

MATOS, Camila. Música Seno, Cosseno e Tangente. *Blog Professora Camila Matos*. Disponível em: http://profcamilamatos-bio.blogspot.com/2013/09/musica-seno-cosseno-e-tangente.html?m=1. Acesso em: 26 mar. 2023.

PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2009. Vol. 2.

Relação entre pi, radiano e grau. *Central Exatas*. 2016. Disponível em: https://www.centralexatas.com.br/matematica/radiano/. Acesso em: 24 mar. 2023.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Comprimento de um Arco "; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/comprimento-um-arco.htm. Acesso em: 27 de março de 2023.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. Medidas de Arcos de Circunferência. *Mundo Educação*. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/amp/matematica/medidas-arcos-circunferencia.htm. Acesso em: 26 mar. 2023.

VINICIUS, Marcus. Trigonometria no triângulo retângulo. *Quero Bolsa*. 2022. Disponível em: https://querobolsa.com.br/enem/matematica/trigonometria-no-triangulo-retangulo. Acesso em: 26 mar. 2023.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; SOARES, Elizabeth, FERNANDEZ, Vicente Paz. *Matemática*: ensino médio, volume único. São Paulo: Editora Scipione 2005.

3.6.1. **Relatório – 29/04/2023**

Relatório 6 - Sala A205

No dia vinte e nove de abril de 2023, foi realizado o sexto encontro do Promat, contando com a presença de 12 alunos. A aula versou sobre ângulos e suas medidas em graus e radianos, relações trigonométricas no triângulo retângulo, bem como ângulos notáveis. A aula teve início aproximadamente as oito horas e cinco minutos.

Antes do início da aula houve um acontecimento imprevisto por nós estagiários, e pelos nossos orientadores. No dia 29 de abril aconteceria na Unioeste campus de Cascavel, um evento de música tendo início a partir das 14 horas. O imprevisto foi que vários alunos vieram dos outros campi da Unioeste, e como eles chegaram no dia anterior, foram disponibilizadas a eles salas de aula para que pudessem passar a noite, dentre elas, as duas salas onde ocorriam o Promat. Por isso, tivemos que ser realocados de última hora para as salas B102 e B103, que ficavam em uma localização um pouco mais difícil de encontrar. Os alunos foram avisados via *whatsapp*, mas não temos certeza se todos visualizaram este aviso, o que pode ter contribuído para a quantidade menor de alunos no presente encontro. Além disso, não foi possível organizar as mesas em grupos, de modo que cada aluno se sentou sozinho.

O imprevisto nos deixou um pouco desorientados no início da aula, mas seguimos o plano, iniciando a aula resolvendo um dos exercícios deixados como atividade na aula anterior, que consistia em encontrar o centro e o raio de uma circunferência a partir da equação geral dada no enunciado. Após a resolução, introduzimos as definições de ângulo e arco, com suas notações, as unidades de medida dos ângulos e arcos, no caso graus e radianos, e então introduzimos exercícios de converter os ângulos de graus para radianos e vice-versa, usando regra de três. Durante este momento, os alunos ficaram passivos, e embora déssemos oportunidade para eles se manifestarem com perguntas, eles se abstiveram de interagir. Durante os exercícios, percorremos a sala e percebemos que eles tiveram dificuldade considerável em converter os ângulos de uma unidade de medida para outra. Notamos que parte dessa dificuldade foi causada pela dificuldade de organização no momento de escrever as medidas de forma a mostrar as proporções equivalentes para aplicar a regra de três.

Após o intervalo, foram introduzidos os conceitos de seno, cosseno e tangente no triangulo retângulo. Falamos sobre suas razões e mostramos também os ângulos notáveis com o auxílio de uma música que servia para memorizar os valores das razões trigonométricas desses ângulos. Algumas atividades foram propostas aos alunos no final da aula, e nos dispusemos auxiliá-los. Os alunos não demonstraram estranhamento com o conteúdo e apresentaram apenas dúvidas pontuais. Em geral, solicitavam simplesmente a confirmação da resposta do exercício. A aula foi finalizada com os exercícios que estavam no material que foi distribuído aos alunos, o quais seriam retomados no início do encontro seguinte.

3.7. **Plano de aula – 7º Encontro 6 maio 2023.**

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Circunferência trigonométrica, simetrias e redução ao 1° quadrante.

Objetivo geral: Estabelecer o conceito de circunferência trigonométrica e promover sua compreensão, apresentando a simetria entre os ângulos correspondentes de cada quadrante e a redução dos ângulos até o 1° quadrante.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Estabelecer as razões trigonométricas do triângulo retângulo na circunferência;
- Associar medidas de graus e radianos aos pontos da circunferência trigonométrica;
- Identificar ângulos côngruos na circunferência trigonométrica;
- Construir a circunferência trigonométrica, compreendendo a simetria presente entre os pontos de cada quadrante.
- Realizar a redução de um ângulo para o seu correspondente no 1° quadrante.

Tempo de execução: Uma aula com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook*, projetor multimídia, *Power Point* e folhas de papel sulfite.

Encaminhamento metodológico:

Realizaremos essa aula com auxílio do projetor presente na sala, projetando lâminas com definições, exemplos e outras informações referentes ao conteúdo. Os alunos serão organizados em grupos de quatro integrantes, mas com liberdade para se sentarem da maneira que preferirem.

O referencial metodológico que será adotado nesta aula será o da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que adquiriram no ensino básico, incentivando a pesquisa e o uso de diferentes métodos e estratégias de resolução.

Utilizaremos os problemas matemáticos de maneira diversificada, para iniciar determinando conteúdo ou para praticar. Será disponibilizado uma folha para cada aluno contendo exercícios, definições e explicações sobre os conceitos que serão trabalhados em aula.

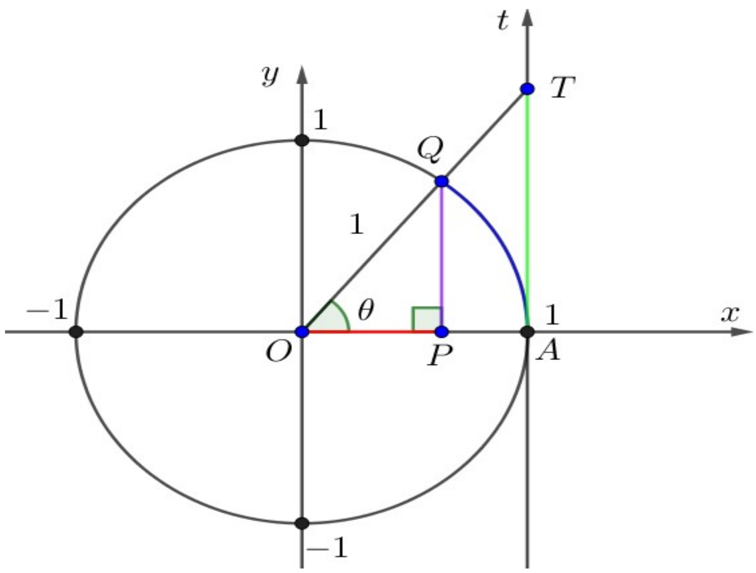
1° Momento Correção de atividades da aula passada. (10 min, até as 08:10)

Para começar, realizaremos a correção das três atividades finais no final da aula passada. Essas atividades serão comentadas em slides do *Power Point*, mas caso algum aluno informe que estava com dificuldades em compreender a questão, realizaremos sua correção no quadro.

2° Momento Estrutura da circunferência trigonométrica. (30 min, até as 08:40)

Primeiramente, introduziremos as razões trigonométricas vistas na última aula, porém utilizando um novo elemento, a circunferência, apresentaremos como a circunferência deve ser tomada.

Figura 33: Circunferência trigonométrica

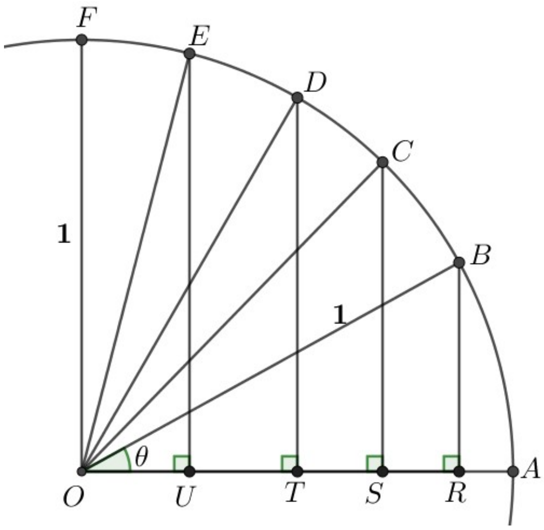


Fonte: Autores (2023).

Na aula passada, os alunos compreenderam que as razões seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo no triangulo retângulo não dependem do tamanho do triângulo, mas sim da medida dos seus ângulos.

Assim, para construir uma tabela com valores dessas razões, podemos considerar **hipotenusas de mesma medida** para todos os triângulos, fazendo variar apenas o ângulo agudo.

Figura 34: Ilustração da relação trigonométrica no círculo



Fonte: Autores (2023).

Usando a figura acima no *Power Point*, mostraremos que os pontos B, C, D e E são vértices de quatro triângulos retângulos, todos eles pertencentes a uma circunferência cujo raio em todos os casos é a medida da hipotenusa desses triângulos.

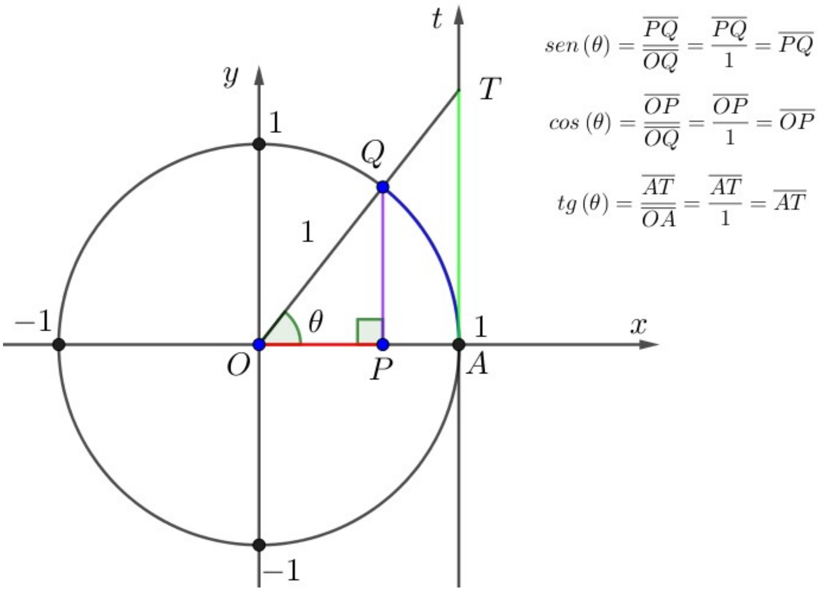
Ao fixarmos o raio dessa circunferência como 1, o seno e cosseno de um ângulo agudo nesses triângulos acabam sendo as próprias medidas dos catetos desses triângulos. Por exemplo,

$$sen\,(\theta) = \frac{\overline{BR}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BR}}{1} = \overline{BR}.$$

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{OR}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OR}}{1} = \overline{OR}$$

Logo, o seno e cosseno de um ângulo θ acaba sendo a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente, respectivamente. Deste modo, formalizamos a circunferência trigonométrica, em que as razões trigonométricas do seno, cosseno e tangente de um ângulo são desenvolvidas na circunferência de raio um e centro O, abrindo agora a possibilidade de estudar essas razões para ângulos não agudos (maiores do que 90°). Usaremos a primeira figura da definição seguinte para comentar esses conceitos.

Figura 35: Círculo trigonométrico.



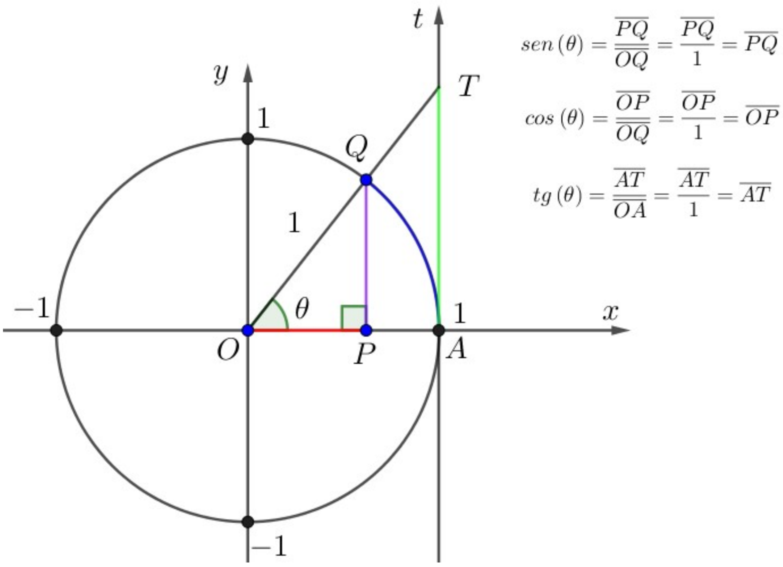
Fonte: Autores (2023).

Em seguida, usaremos a próxima figura da definição para informar que o ponto $A(1,0)$ é a origem de todos os arcos a serem medidos nessa circunferência. Caso a medida desse arco seja feita no sentido horário, será atribuído um sinal negativo, e no sentido anti-horário, que é a forma mais utilizada, a medida do arco ficará com sinal positivo.

Definição (Circunferência trigonométrica)

Considere no plano cartesiano uma circunferência de raio $r = 1$ com centro em O, que coincide com a origem do plano cartesiano. Partindo de A até um ponto Q da circunferência, temos em azul o arco $\widehat{AQ}$ de medida angular θ.

Figura 36: Círculo trigonométrico.



Fonte: Autores (2023)

Ao estabelecer o triângulo retângulo QOP usando Q, a hipotenusa do triângulo acaba tendo medida um, o que também resulta no seno e cosseno do ângulo θ sendo iguais as medidas dos catetos $\overline{PQ}$ e $\overline{OP}$,

$$sen\,(\theta) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ}$$

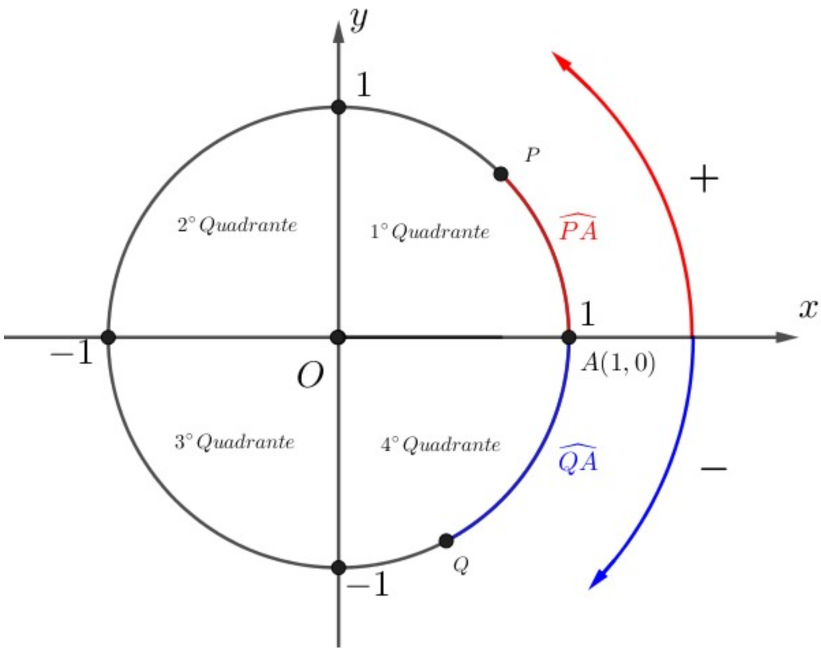
$$\cos(\theta) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP}}{1} = \overline{OP}$$

Chamamos de tangente de θ, a medida do segmento de reta $\overline{AT}$ em verde, que está contido no eixo real t, denominado de eixo das tangentes.

$$tg\,(\theta) = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}$$

Arcos e suas orientações na circunferência trigonométrica

Figura 37: Arcos e suas orientações na circunferência trigonométrica.



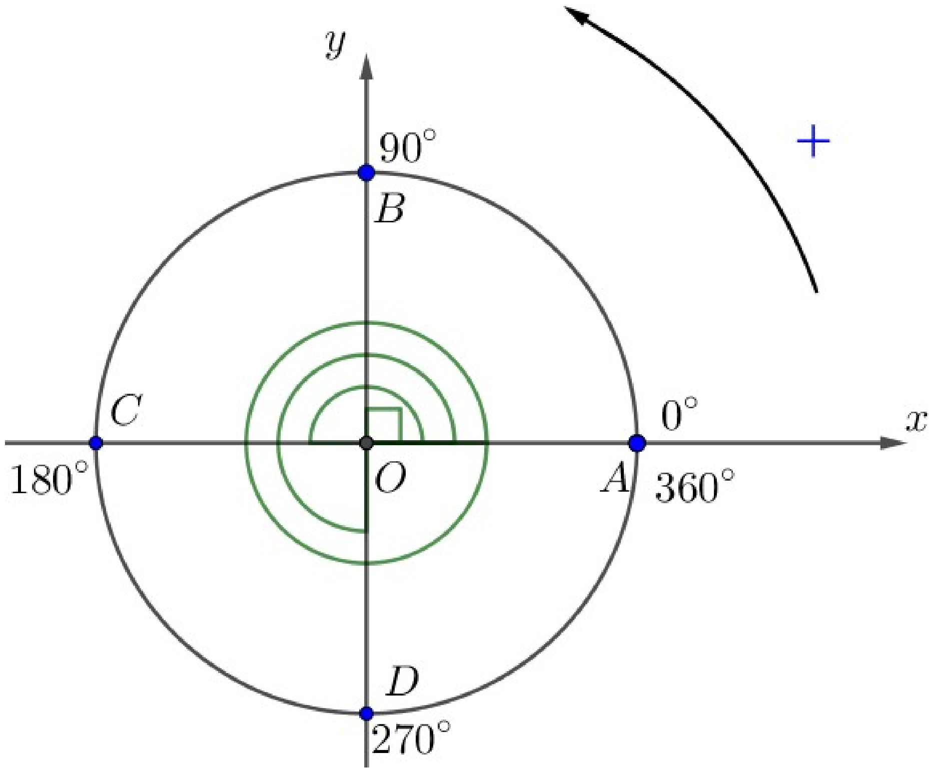
Fonte: Autores (2023)

Ainda sobre a estrutura dessa circunferência, o ponto $A(1{,}0)$ é a origem de todos os arcos a serem medidos nessa circunferência. Se um arco $\widehat{QA}$ for medido no sentido horário, então essa medida angular tem sinal negativo. Agora, se um arco $\widehat{PA}$ for medido no sentido anti-horário, será atribuída a essa medida angular um sinal positivo.

Na sequência, falaremos sobre a associação dos pontos pertencentes a circunferência trigonométrica com suas medidas em grau e radiano. Escolhemos aqui não comentar sobre a associação que pode ser feita na circunferência trigonométrica entre seus pontos com números reais, pois poderia gerar confusão de escrita com as medidas em radianos. Exemplo: Associar o $\frac{\pi}{2}\ rad \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$.

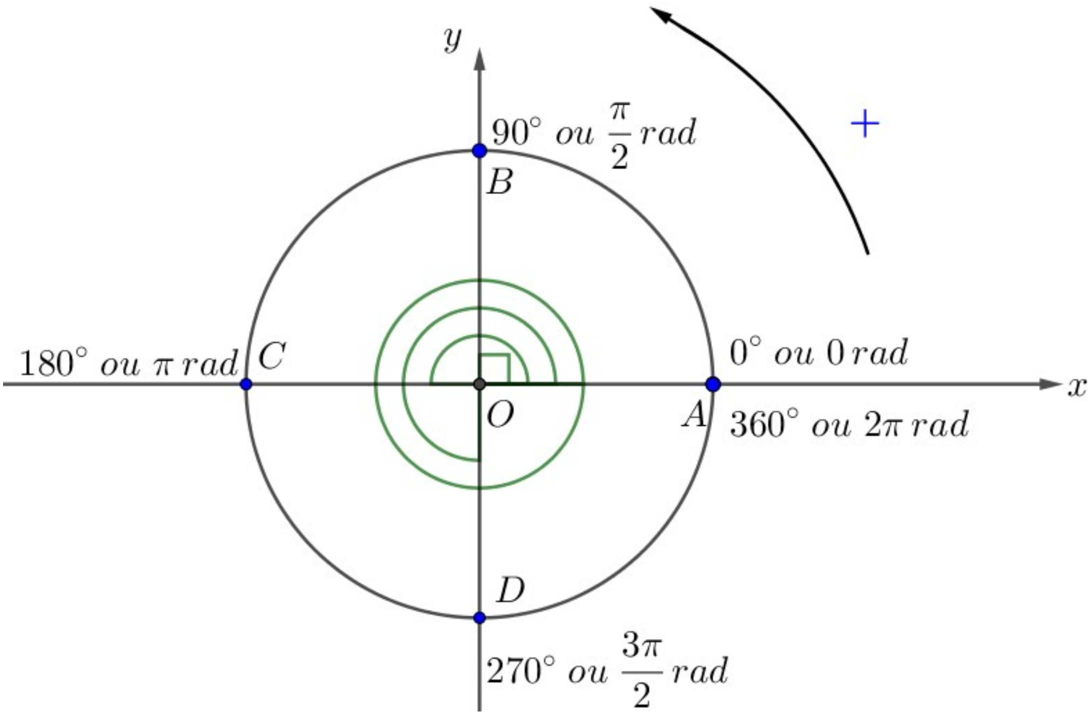
Apresentaremos primeiro a seguinte circunferência trigonométrica, onde os possíveis arcos formados na circunferência, a partir do ponto A, são medidos em graus. Aproveitaremos esse momento para perguntar qual seria a medida em radianos de cada um desses ângulos, caso ninguém consiga dizer o formato em radianos, pediremos que tentem calculá-los.

Figura 38: Ângulo no círculo trigonométrico em graus.



Fonte: Autores (2023).

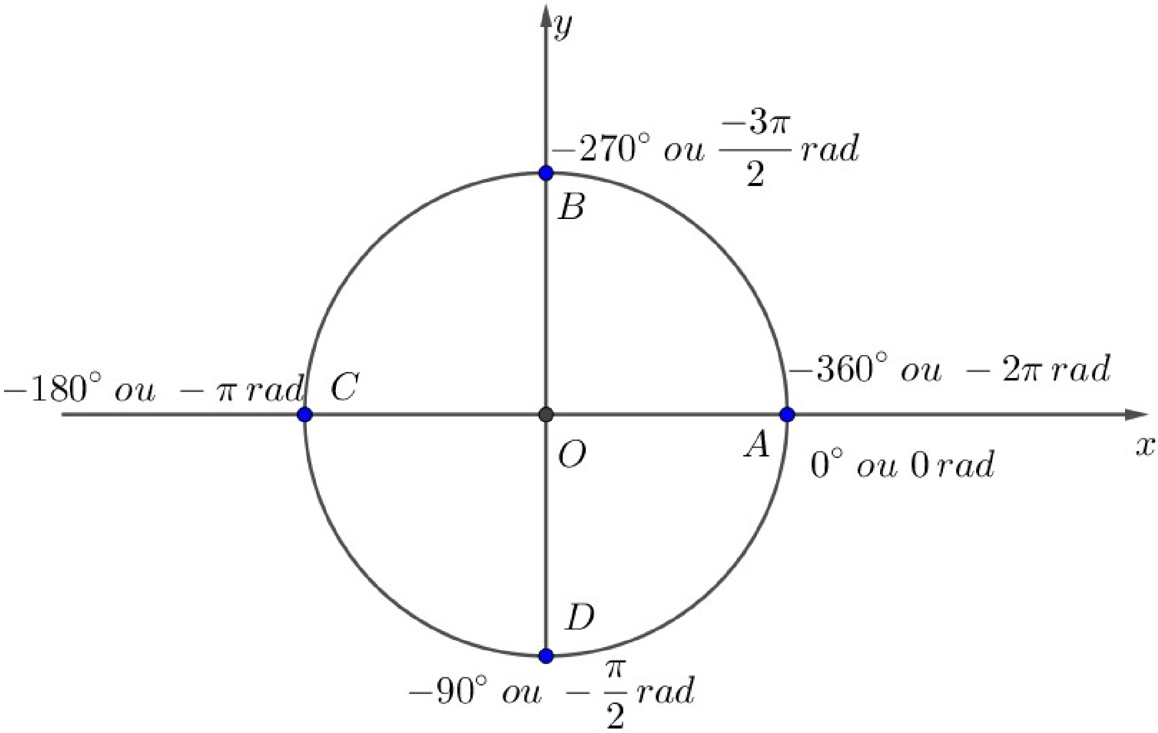
Figura 39: Ângulo no círculo trigonométrico em radianos.



Fonte: Autores (2023)

Em seguida, vamos perguntar aos alunos como seriam esses mesmos valores na circunferência se seguíssemos o sentido contrário. Espera-se que eles percebam que tanto os graus quanto os radianos desses ângulos são negativos, e alguns sofrem uma mudança de posição em relação ao do sentido anti-horário.

Figura 40: Ângulo no círculo trigonométrico em radianos e em graus no sentido anti-horário.

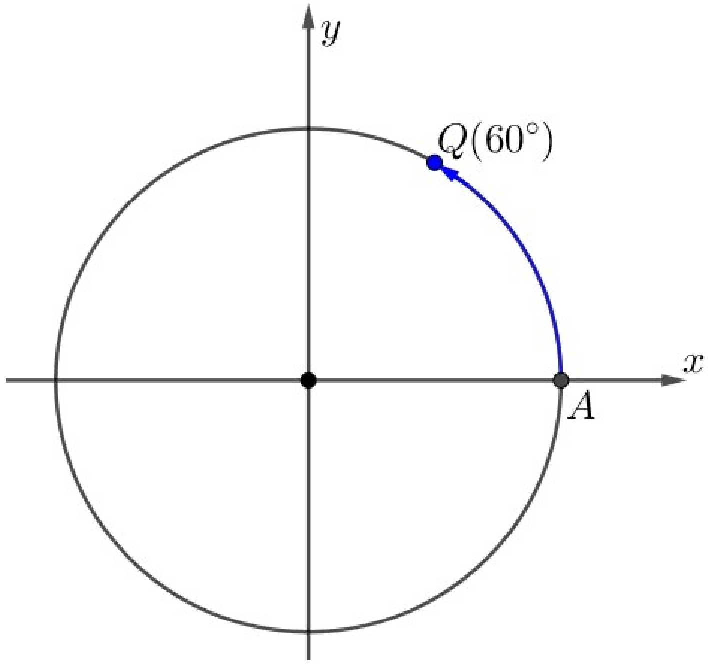


Fonte: Autores (2023).

3° Momento Arcos côngruos e simetrias. (60 min, até as 09:40)

No próximo momento, vamos apresentar o conceito de arcos côngruos na circunferência trigonométrica. Supondo que fosse girado 60° no anti-horário (horário), partindo do ponto $A(1,0)$ da circunferência trigonométrica. Nós chegaríamos num ponto Q e essa medida de 60° estaria associada a esse ponto Q, como mostrado abaixo.

Figura 41: Representação de ponto com ângulo de 60º graus.

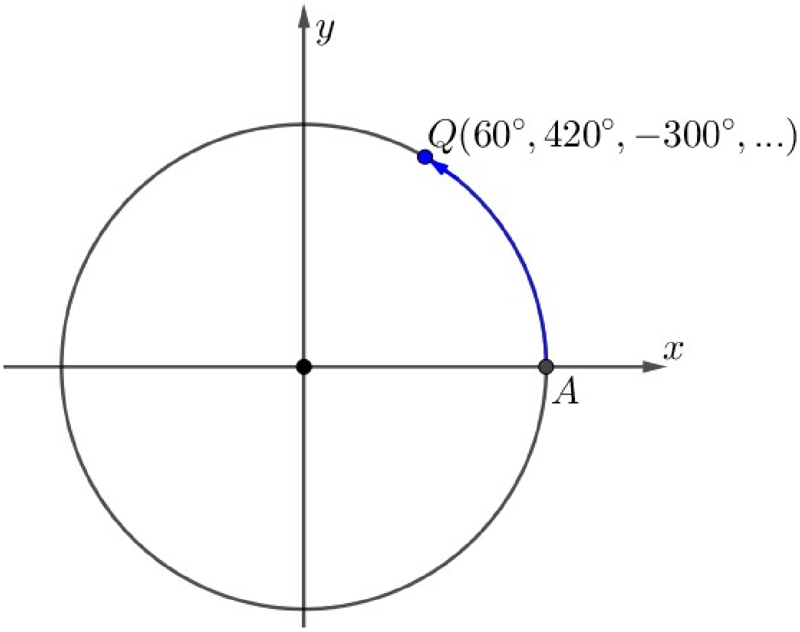


Fonte: Autores (2023).

No entanto, existem infinitas medidas associadas ao ponto Q. Se partíssemos de A no sentido anti-horário, girando uma volta completa mais 60°, iriamos parar novamente em Q. Logo, $360° + 60° = 420°$ também é uma medida associada a Q.

Agora, partindo de A e girando -300° no sentido horário, novamente chegaríamos no ponto Q. Logo, $-360° + 60° = -300°$ também é uma medida associada a Q.

Figura 42: Representação de ponto com ângulo de 60º graus e seus ângulos congruentes.



Fonte: Autores (2023)

Antes de definir esse conceito, vamos perguntar aos alunos se poderiam dar outro exemplo de medida associada a Q, por exemplo, $780°$.

Definição (Arcos côngruos)
Dois arcos são côngruos (ou congruentes) quando têm a mesma extremidade e se diferem apenas pelo número de voltas. Se um arco mede θ graus, podemos expressar todos os arcos côngruos a ele da seguinte forma:

$\theta° + 360° \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$ ($k + 1$ indica o n° da volta)

Caso a medida do arco seja dada em radianos, representamos por:

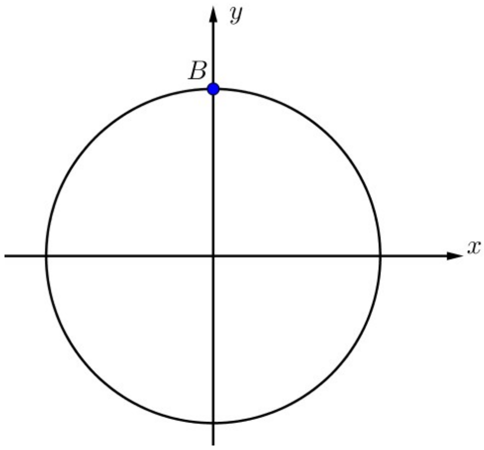
$\theta\ rad + 2k\pi\ rad$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Em seguida, para auxiliar os alunos a praticarem esse conceito, preparamos os seguintes exercícios retirados do livro Matemática Paiva (2009, p.47). Essas questões foram escolhidas por serem de simples aplicação, mas também por necessitarem de uma abordagem mais elaborada.

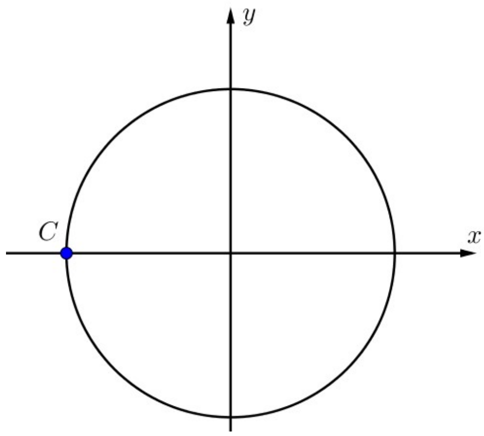
Será disponibilizado um tempo de 20 minutos para a realização dessas atividades. Convidaremos os alunos para resolverem as duas primeiras questões, já as duas últimas questões serão deixadas para um estagiário.

Exercícios - I

1) Calcule os ângulos côngruos em graus, associados a B da circunferência trigonométrica abaixo, nas quatro primeiras voltas positivas $(0 \leq x < 1.440°)$.



2) Calcule os ângulos côngruos em radianos, associados a C da circunferência trigonométrica abaixo, nas quatro primeiras voltas positivas $(0 \leq x < 8\pi)$.



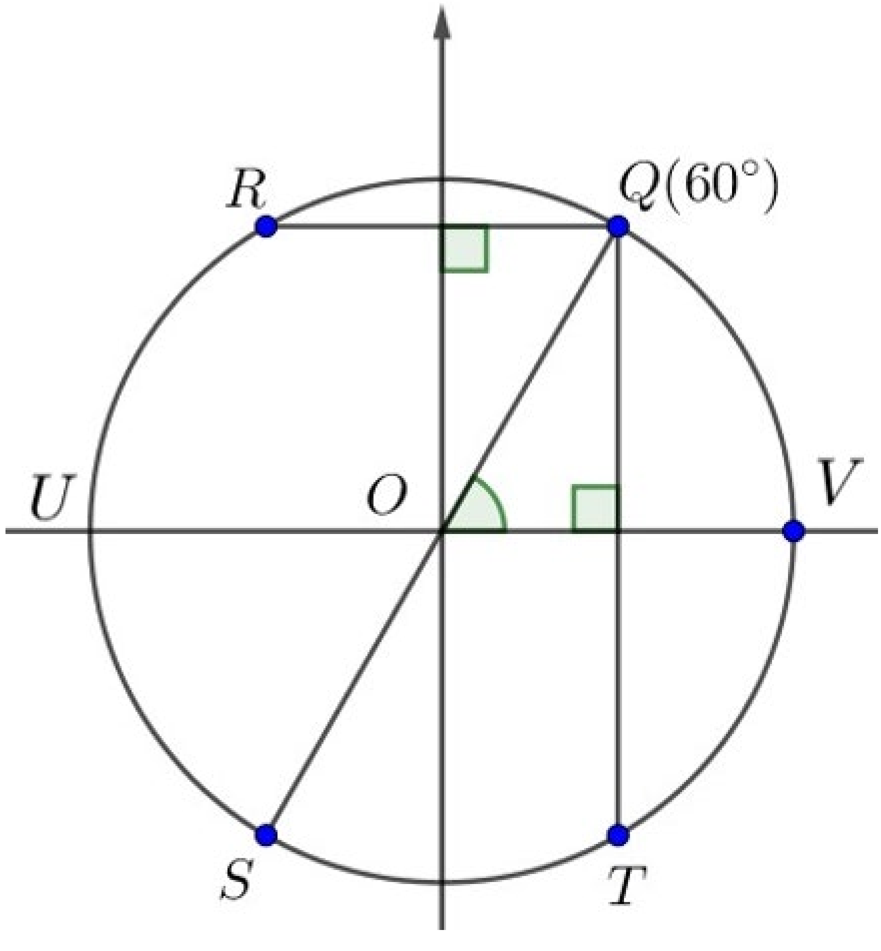
3) Calcular a medida x do arco côngruo a 1.140º da 1ª volta positiva $(0 \leq x < 360°)$.

4) (modificado) Determine a medida de x do arco da 1° volta positiva $(0 \leq x < 2\pi)$ que é congruente ao arco $\frac{17\pi}{2}\ rad$.

Na sequência, vamos abordar os casos de simetria presente entre os pontos da circunferência trigonométrica. Nesse lugar geométrico podemos relacionar medidas de arcos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano (Paiva, 2009).

Para início do estudo, vamos considerar um ponto Q pertencente a circunferência abaixo, associado a medida de 60 graus. Por esse ponto, traçaremos três segmentos de retas: uma perpendicular ao eixo y, a que passa pela origem do sistema e a perpendicular ao eixo x. Os pontos R, S e T da circunferência que foram, respectivamente, interceptados por essas retas, são chamados de simétricos (ou correspondentes) do ponto Q.

Figura 43: Representação de ângulos simétricos a 60º.



Fonte: Autores (2023).

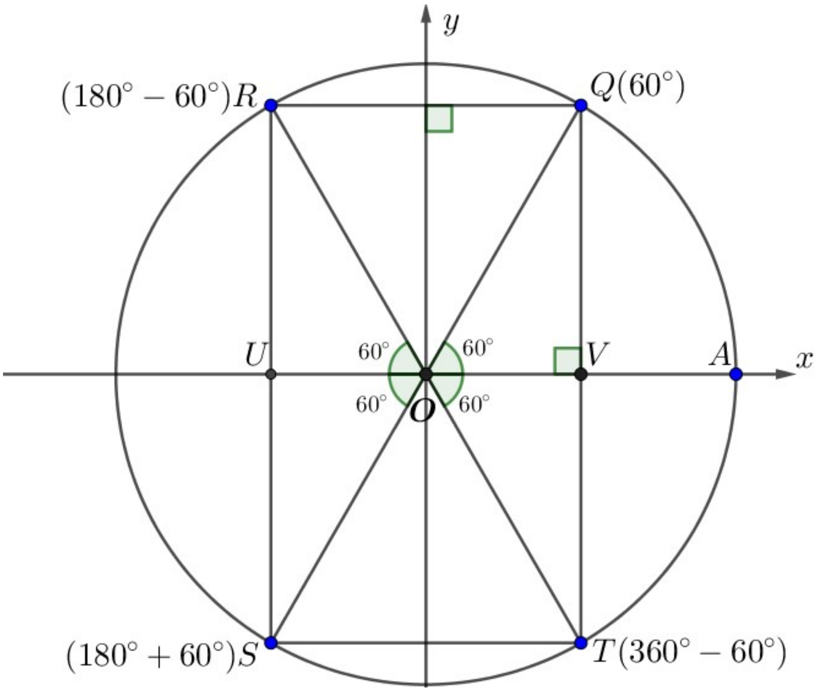
Para determinar as medidas em graus associadas a esses três pontos, perceba que:

I) Os ângulos $R\hat{O}U$ e $V\hat{O}Q$ têm a mesma medida de 60°, logo o arco trigonométrico $\widehat{VR}$ mede $180° - 60° = 120°$.

II) Os ângulos $S\hat{O}U$ e $V\hat{O}Q$ têm a mesma medida, logo o arco trigonométrico $\widehat{VS}$ mede $180° + 60° = 240°$.

III) Os ângulos $V\hat{O}T$ e $V\hat{O}Q$ têm a mesma medida, logo o arco trigonométrico $\widehat{VT}$ mede $360° - 60° = 300°$.

Figura 44: Representação de ângulos simétricos a 60º.



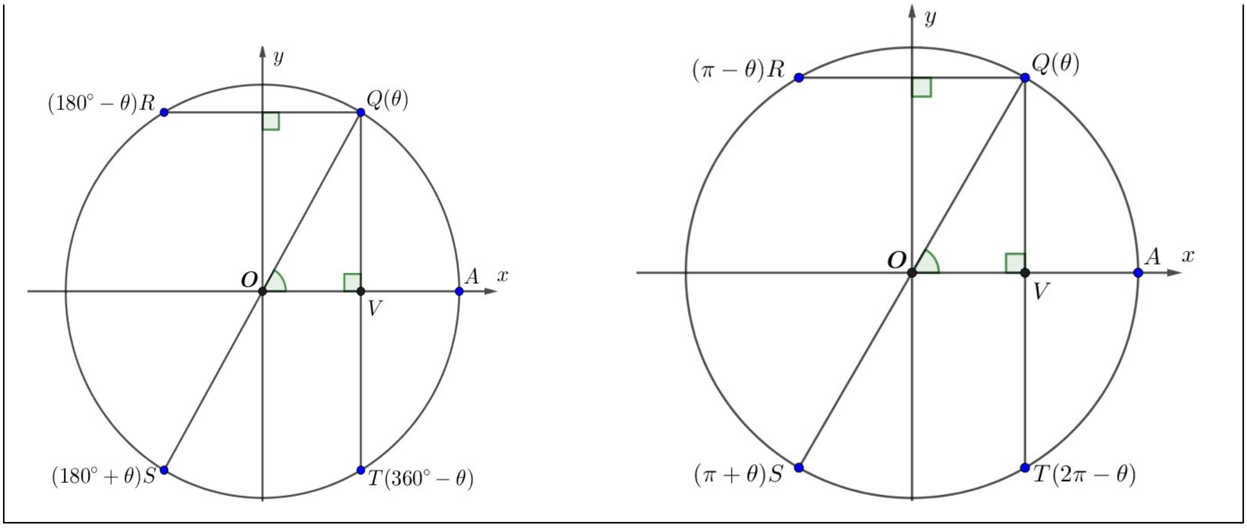
Fonte: Autores (2023).

Generalizando o processo para um ponto qualquer da circunferência:

Definição (Arcos simétricos)

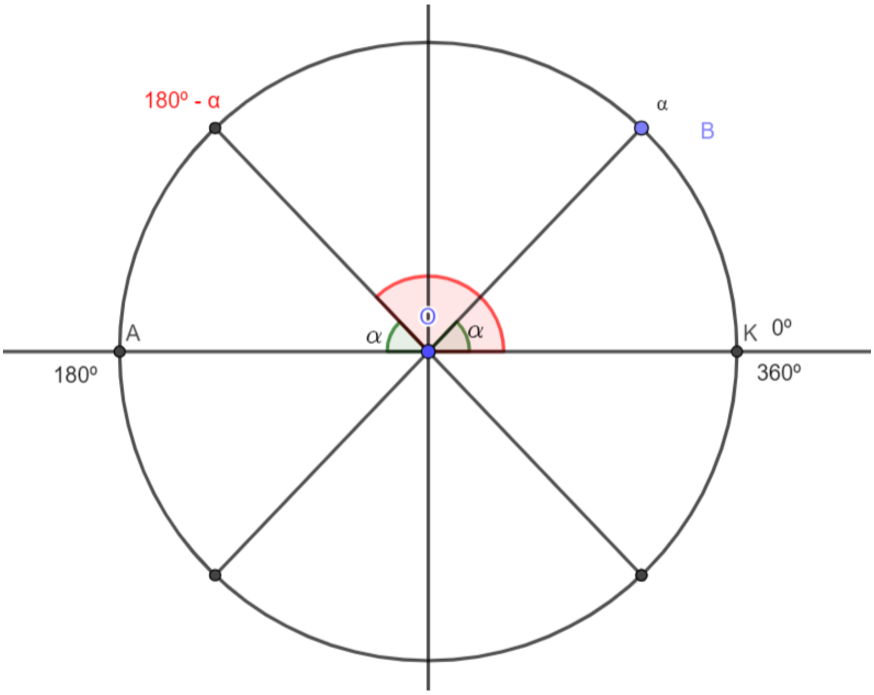
Arcos simétricos são aqueles que possuem extremidades (pontos) que são simétricos em relação ao eixo x (4° Quadrante), eixo y (2° Quadrante) e à origem do sistema cartesiano (3° Quadrante). Considere θ uma medida qualquer associada ao ponto Q na circunferência, logo

Para θ medido em graus; **Para θ medido em radianos;**



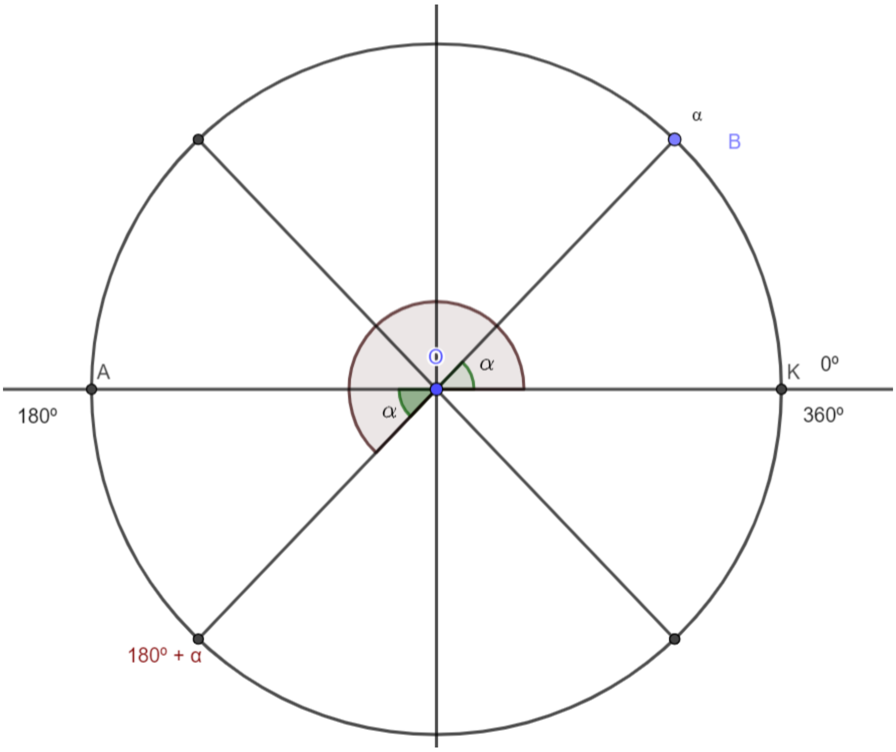
Outra forma de visualizarmos é a seguinte:

Figura 45: Ângulo simétrico no segundo quadrante.



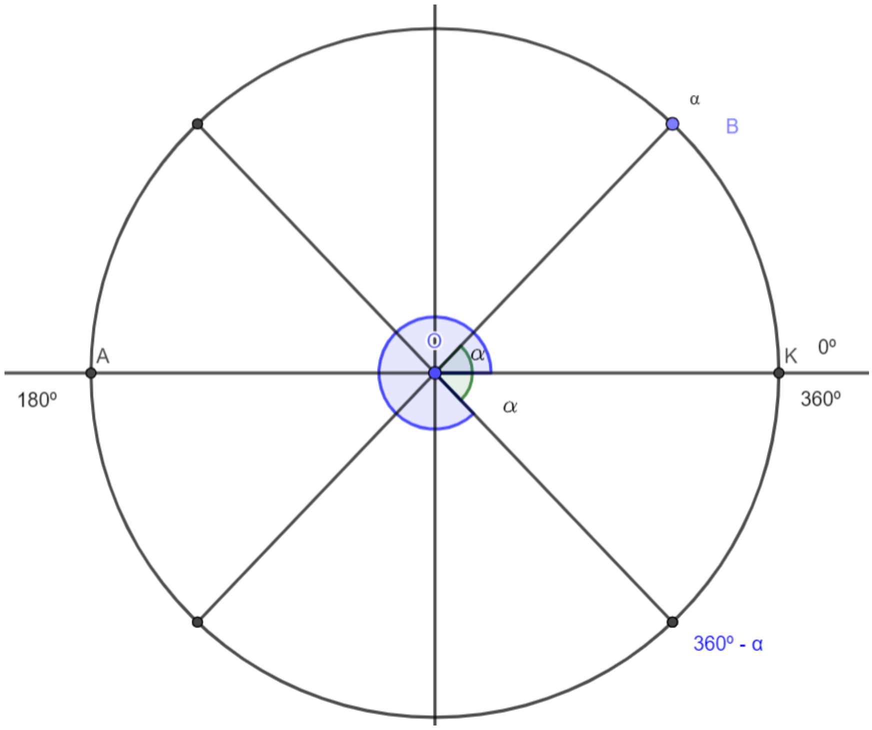
Fonte: Autores (2023).

Figura 46: Ângulo simétrico no terceiro quadrante.



Fonte: Autores (2023).

Figura 47: Ângulo simétrico no quarto quadrante.



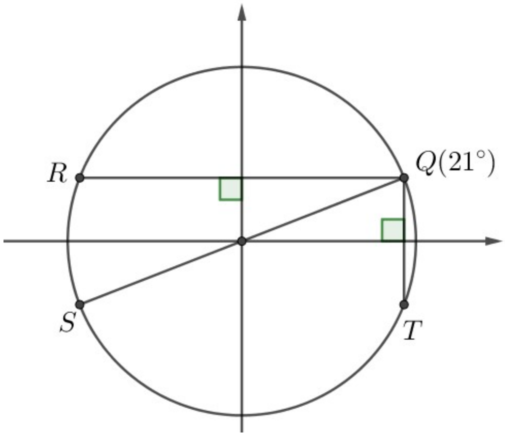
Fonte: Autores (2023).

Como prática, após definir as simetrias, vamos solicitar aos alunos que resolvam as seguintes questões. Esses exercícios foram retirados do livro Matemática Paiva (2009, p.51) e escolhidos por abordarem cálculos tanto para graus quanto para radianos. Os vértices dos pontos simétricos dessas questões foram modificados para R, S e T para se adequarem a nossa notação.

Um tempo de 15 minutos será disponibilizado para resolverem e as resoluções serão apresentadas após o intervalo. Convidaremos um aluno para resolver uma das três questões.

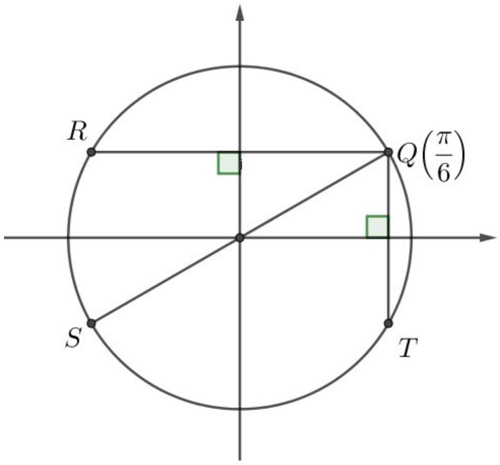
Exercícios – II

1) O ponto Q da circunferência trigonométrica abaixo, está associado à medida $21°$. Quais são as medidas x $(\text{com } 0° \leq x < 360°)$ associadas aos pontos R, S e T?



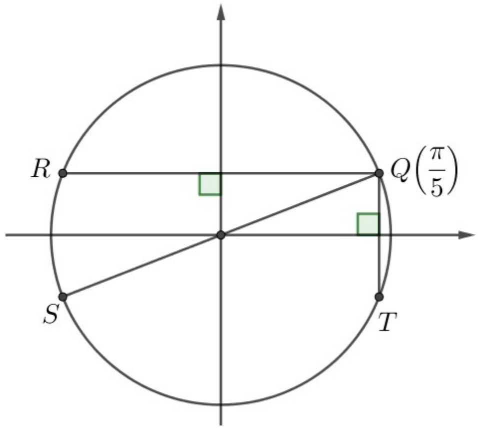
Fonte: Autores (2023).

2) O ponto Q da figura está associado à medida $\frac{\pi}{6}\,rad$. Determinar as medidas x $(\text{com } 0 \leq x < 2\pi)$ associadas aos pontos R, S e T.



Fonte: Autores (2023).

3) O ponto Q, da circunferência trigonométrica abaixo, está associado à medida $\frac{\pi}{5}\,rad$. Calcule as medidas x $(\text{com } 0 \leq x < 2\pi)$ associadas aos pontos R, S e T?



Fonte: Autores (2023)

4° Momento Intervalo (20 min, até as 10:00)

5° Momento Seno e cosseno de um arco trigonométrico. (40 min, até as 10:40)

Agora que os estudantes conhecem a simetria presente entre os pontos na circunferência trigonométrica, eles possuem o conhecimento necessário para associar a uma extremidade de um arco, algum par ordenado de coordenadas dadas em seno e cosseno.

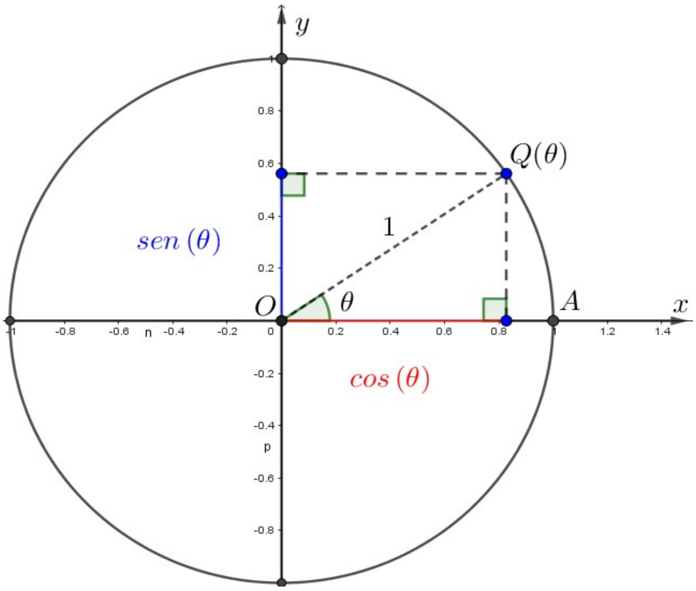
Anteriormente, foi definido a circunferência trigonométrica de raio 1 e centro O justamente no plano cartesiano, logo, qualquer ponto dessa circunferência pode ser associado a algum par ordenado (x, y).

Também estabelecemos que ao calcular o seno, cosseno e a tangente de um ângulo θ, as razões trigonométricas de seno e cosseno seriam iguais as medidas dos catetos do triângulo retângulo com esse ângulo θ interno. Associado a esse ângulo, temos um ponto Q da circunferência, então podemos afirmar que $\cos(\theta)$ e $sen\ (\theta)$ são, respectivamente, as coordenadas no eixo x e no eixo y do ponto Q.

Associação entre pontos do plano cartesiano e da circunferência trigonométrica

Dado um arco trigonométrico $\widehat{AQ}$ de medida θ, chama-se cosseno e seno de θ as coordenadas no eixo x (abscissa) e no eixo y (ordenada) do ponto Q, respectivamente.

Figura 48: Círculo trigonométrico.



$\cos\ (\theta) = coordenada\ x\ de\ Q$

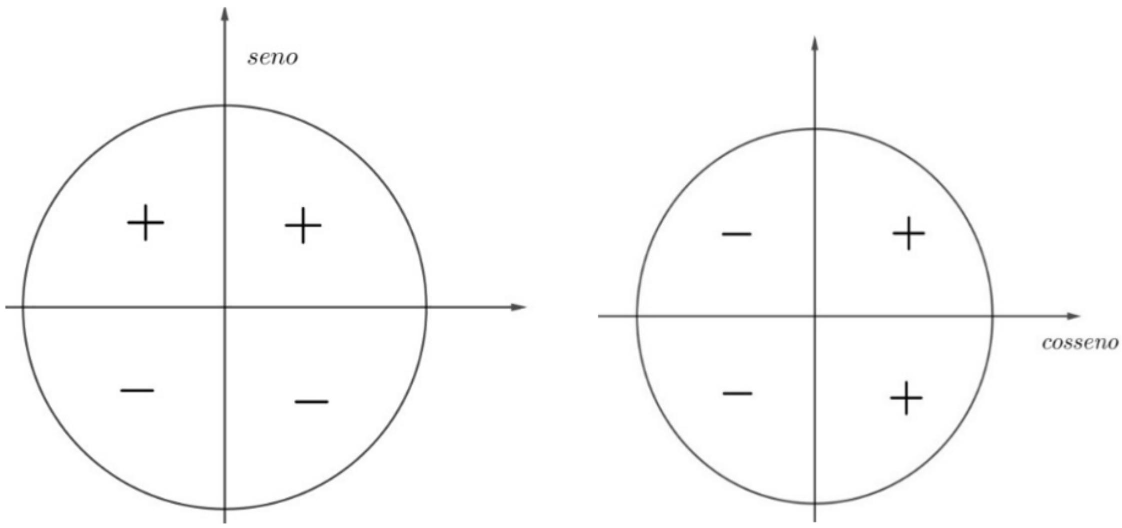
$sen\ (\theta) = coordenada\ y\ de\ Q$

$Q(\theta)$ pode ser escrito na forma de par ordenado:

Fonte: Autores (2023).

Assim, na circunferência trigonométrica, podemos nos referir ao eixo x como **eixo dos cossenos** e ao eixo y como **eixo dos senos**. Relembrando a 3ª aula, os pontos assumem valores de coordenadas positivas ou negativas dependendo do quadrante em que estão. Assim, temos o seguinte esquema de sinais para seno e cosseno:

Figura 49: Sinais de seno e cosseno.



Fonte: Autores (2023)

Nesse momento, de modo a ajudar na compreensão desses conceitos de seno e cosseno abordados na circunferência, vamos usar como exemplos os arcos notáveis vistos na última aula, mas agora os alunos terão que encontrar seus simétricos e, observando a circunferência trigonométrica, escrever o sinal desse simétrico em seu quadrante. Deixaremos para a próxima aula para falar dos sinais para a tangente de um ângulo, por conta do tempo.

Daremos um tempo de 15 minutos para os alunos completarem o quadro e deixaremos uma circunferência no Power point para auxiliar nessa atividade.

Quadro 2: Quadro seno e cosseno de ângulos simétricos para completar.

	2° Quadrante			1° Quadrante	
simétricos	seno	cosseno	ângulos	seno	cosseno
			30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
			45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
			60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
simétricos	3° Quadrante		simétricos	4° Quadrante	

Fonte: Autores (2023).

Quadro 3: Quadro seno e cosseno de ângulos simétricos para completado.

	2° Quadrante			1° Quadrante	
simétricos	seno	cosseno	ângulos	seno	cosseno
150º	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
135º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

120º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
simétricos	3° Quadrante		simétricos	4° Quadrante	
210º	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	330º	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
225º	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	315º	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
240º	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	300º	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fonte: Autores (2023).

Sob a premissa de que os alunos estão habituados com o processo de encontrar pontos simétricos aos do 1° quadrante, comentaremos como associar ângulos que estão no 2°, 3° e 4° quadrantes com os do 1° quadrante, isto é, realizar a redução de ângulos ao 1° quadrante.

Redução ao 1° Quadrante

Considere um ângulo θ estando no 2°, 3° ou 4° quadrante. Para encontrar o ângulo correspondente C no 1° quadrante, basta utilizar a simetria na circunferência trigonométrica, realizando as seguintes modificações:

Para θ em graus;

$2°\,Q \Rightarrow 1°Q: 180° - \theta = C$

$3°Q \Rightarrow 1°Q: \theta - 180° = C$

$4°Q \Rightarrow 1°Q: 360° - \theta = C$

Para θ em radianos;

$2°\,Q \Rightarrow 1°Q: \pi - \theta = C$

$3°Q \Rightarrow 1°Q: \theta - \pi = C$

$4°Q \Rightarrow 1°Q: 2\pi - \theta = C$

Se o ângulo θ for maior que 360°, dívida ele por 360, o **resto** dessa divisão indica o correspondente de θ na 1° volta da circunferência.

Exemplo: Qual é o ângulo correspondente no 1° quadrante do ângulo 850°.

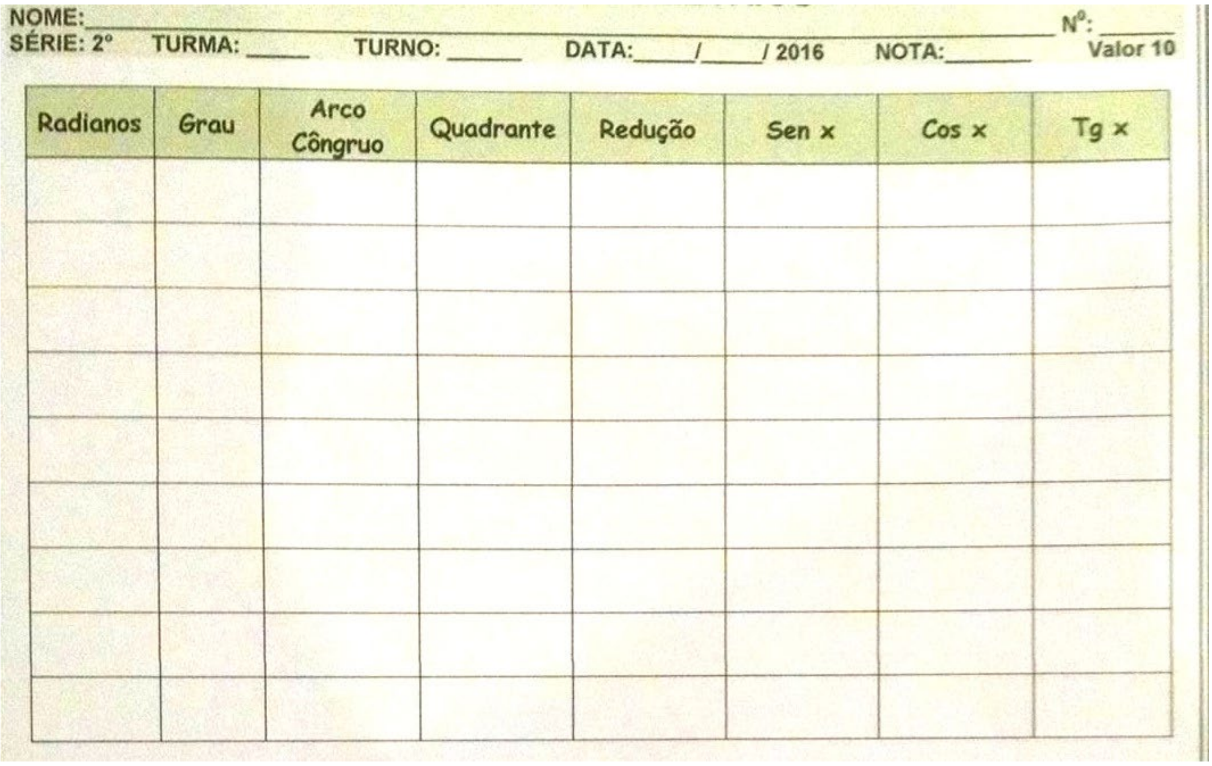
R: Dividindo 850° graus por 360, temos resto 130° que está no 2° Quadrante, assim seu corresponde no 1° Quadrante é $180° - 130° = 50°$.

6° Momento Jogo do Stop trigonométrico. (60 min, até as 11:40)

Para finalizar a aula, preparamos o jogo *Stop Trigonométrico* em que será sorteado um ângulo em radianos em cada rodada e cada aluno terá que completar o quadro abaixo que entregaremos. Essa atividade foi escolhida com base no artigo de Musha et. al. (2016), que trabalha essa mesma atividade com alunos do 2° ano do Ensino Médio, em que se consta um desenvolvimento na compreensão dos mesmos conceitos trigonométricos abordados ao longo dessa aula.

O sorteio será realizado através do *Software Excel* assim como a resolução da linha apresentada no slide para que os alunos possam pontuar de uma forma mais rápida.

Figura 50: Quadro do jogo stop utilizada no artigo



NOME:__________ Nº: ______
SÉRIE: 2° TURMA: _____ TURNO: ______ DATA:_____/_____/ 2016 NOTA:_______ Valor 10

Radianos	Grau	Arco Côngruo	Quadrante	Redução	Sen x	Cos x	Tg x

Fonte: Musha et. al (2023)

Como vamos abordar os sinais assumidos pela tangente dos ângulos somente no próximo encontro, a coluna “Tg x” será desconsiderada.

Dinâmica do jogo

Após todos os alunos receberem seus quadros com sete colunas, sortearemos a cada rodada um ângulo medido em radianos, por exemplo, $\frac{20\pi}{3}$. Cada aluno deverá preencher, nesta ordem, o ângulo sorteado em radianos; o ângulo equivalente em graus; o arco côngruo do ângulo na 1° volta (também em graus); a qual quadrante pertence o arco côngruo; a redução do arco côngruo ao primeiro quadrante; o seno e o cosseno desse arco côngruo.

Para isso os alunos deverão utilizar os conceitos aprendidos na presente aula, como a tabela dos ângulos notáveis. Para os alunos terem um tempo hábil de preencher boa parte da tabela, seguindo o exemplo de Musha et. al. (2016), vamos estabelecer com os alunos para pararem de escrever depois que o 5º aluno fala "*stop*".

Todos os ângulos que serão sorteados, na redução ao primeiro quadrante, resultam em um ângulo notável. Para o primeiro ângulo sorteado, vamos resolver junto com os alunos, explicando como deverão fazer nos próximos.

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou no quadro negro.

Referências:

MUSHA, Fernanda Dartora et. al. *Stop* trigonométrico: o jogo como recurso didático no ensino e aprendizado de trigonometria. SEMANA DE ENSINO, EXTENSÃO, PESQUISA E INOVAÇÃO DO LITORAL, 2. 2016, Paranaguá. *Seminário.* Universidade Federal do Paraná – UFPR, Campus Paranaguá. Disponível em: https://sigpibid.ufpr.br/site/uploads/institution_name/ckeditor/attachments/875/S2016_STOP_TRIGONOM_TRICO_-_O_JOGO_COMO_RECURSO_DID_TICO_NO_ENSINO_E_APRENDIZADO_DE_TRIGONOMETRIA.pdf. Acesso em: 03 abr. 2023.

PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2009. Vol. 2.

TAMASHIRO, Willian. TRIGONOMETRIA: Circúlo trigonométrico. *Enemex matemática*. 2017. Disponível em: http://enemex-matematica.com.br/estudos/geometria/trigonometria/aula-1-circulo-trigonometrico. Acesso em: 01 abr. 2023.

3.7.1. **Relatório – 06/05/2023**

Relatório 7 - Sala A205

No dia seis de maio de 2023, foi realizado o sétimo encontro do Promat, contando com a presença de 17 alunos num dia ensolarado e fresco. O tema da aula era circunferência trigonométrica, simetria e redução ao primeiro quadrante. A aula teve início aproximadamente as oito horas e cinco minutos.

A aula foi iniciada retomando o conteúdo da aula anterior com o auxílio de lâminas. Fizemos uma revisão dos exercícios que ficaram sem resolução na última aula, embora as respostas tenham sido postadas no grupo de *WhatsApp* da turma. Após este momento, introduzimos o conceito de circunferência trigonométrica, explicando que cada ângulo no ciclo trigonométrico centrado na origem do plano cartesiano e raio igual a um, está associado à um ponto da circunferência, sendo as coordenadas x e y deste ponto o cosseno e o seno do ângulo respectivamente. A tangente do ângulo foi ilustrada como uma reta paralela ao eixo y, que intercepta o eixo x no número real um. Durante este período foram feitas algumas perguntas aos alunos, conforme íamos falando dos conceitos e, embora houvesse participação, notamos um pouco de timidez e insegurança.

Depois desta parte, apresentamos os conceitos de arcos e suas orientações no ciclo trigonométrico, explicando sobre arcos côngruos e simetrias, onde mostramos que para cada ponto do ciclo existem infinitas medidas associadas a ele. Foram apresentados exemplos e exercícios onde se pedia para encontrar medidas associadas a dois ângulos, um dado em graus e o outro em radianos. Foi necessário explicar para um grupo de alunas que faltaram a aula anterior, como converter ângulos em graus para radianos e vice-versa, fazendo com que elas fossem capazes de resolver o exercício proposto. Falamos então sobre arcos simétricos, explicando como encontrar o seno e o cosseno deles em cada quadrante. Uma tabela de seno e cosseno de ângulos notáveis foi fornecida aos alunos, mas ela estava incompleta. Solicitamos aos alunos que completassem a tabela com o seno e cosseno dos arcos simétricos dos ângulos notáveis. Notamos alguma dificuldade dos alunos, mas todos conseguiram completar a atividade.

Após o intervalo, falamos sobre seno cosseno em um arco trigonométrico, sobre como encontrar o seno e o cosseno de cada ângulo nos eixos do plano cartesiano, e mostrado a mudança de sinal conforme os ângulos variam de 0º a 360º (ou de 0 *rad* a 2π *rad*). Nos últimos 45 minutos propomos um jogo, chamado *stop* trigonométrico, para fixar os conteúdos apresentados na aula. Fornecemos uma tabela com 7 colunas e para cada ângulo em radianos que sorteássemos, os alunos deveriam escrevê-lo em graus, informar o quadrante do ângulo, o arco côngruo na primeira volta, a redução ao primeiro quadrante, seu seno e cosseno. Os alunos não ficaram tão animados como esperávamos, mas realizaram a atividade. Conforme fazíamos os sorteios, ajudávamos os alunos a pensarem sobre como encontrar estas informações no ciclo trigonométrico. Algumas alunas perceberam que a tabela que montaram anteriormente tinha muitas das informações, e conseguiram ganhar o jogo. Terminamos a aula pedindo para os alunos contarem quantos itens tinham acertado, mas eles não demonstraram interesse em fazer isso.

3.8. Plano de aula – 8º Encontro 13 maio 2023.

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Variação de sinal da tangente; Relação fundamental da trigonometria; Seno, cosseno e tangente da soma de arcos.

Objetivo geral: Completar o estudo do sinal das razões seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica, estabelecendo também a relação fundamental e a soma de arcos dessas razões.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Entender a variação de sinal da tangente na circunferência trigonométrica, além de realizar a redução ao 1° quadrante dos ângulos notáveis através dela;
- Compreender a relação fundamental da trigonometria e a como aplicá-la em questões dessa área;
- Compreender e aplicar o seno, cosseno e a tangente da soma de arcos em problemas de trigonometria.

Tempo de execução: Uma aula com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook*, projetor multimídia, *Power Point*, folhas de papel sulfite.

Encaminhamento metodológico:

Realizaremos essa aula com auxílio do projetor presente na sala, projetando lâminas com definições, exemplos e outras informações referentes ao conteúdo. Os alunos serão organizados em grupos de quatro, mas com liberdade para se sentarem da maneira que preferirem.

O referencial metodológico que será adotado nesta aula será o da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que adquiriram no ensino básico, incentivando a pesquisa e o uso de diferentes métodos e estratégias de resolução. Além disso, é importante comentar que os capítulos do livro Matemática Paiva (2009) serviram como inspiração para a construção desse plano de aula.

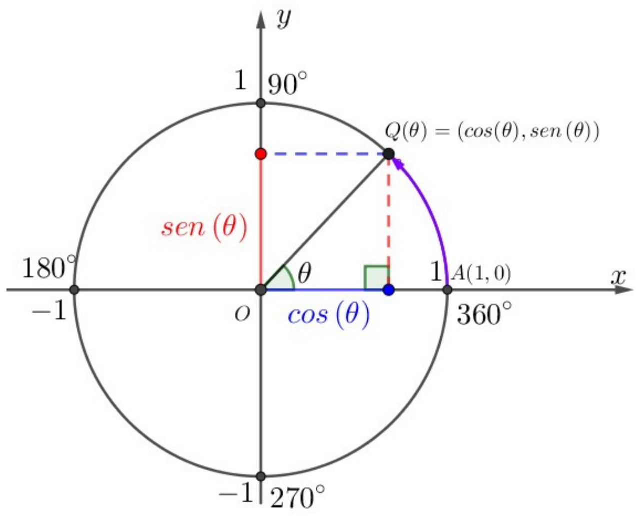
Utilizaremos os problemas matemáticos de maneira diversificada, para iniciar determinando conteúdo ou para praticar. Será disponibilizado uma folha para cada aluno contendo exercícios, definições e explicações sobre os conceitos que serão trabalhados em aula.

1° Momento Retomada da variação do sinal do seno e cosseno e definição da variação da tangente. (50 min, até as 08:50)

Primeiramente, vamos retomar o que foi comentado na última aula sobre seno e cosseno na circunferência trigonométrica. Explicaremos novamente que ao assumir essa circunferência de raio um, qualquer triângulo retângulo que tiver um de seus vértices nessa circunferência terá a hipotenusa igual a um.

Além disso, o cosseno do ângulo agudo interno a esse triângulo será igual ao comprimento do cateto adjacente e o seno desse ângulo será igual ao comprimento do cateto oposto. Usaremos a imagem abaixo para iniciar essa discussão e perguntaremos a sala o valor dos exemplos abaixo.

Figura 51: Seno e cosseno no círculo.



Fonte: Autores (2023).

Exemplo

Calcule o valor de:

a) $\cos 120° =$ c) $\cos 135° =$ e) $\cos 210° =$ g) $\cos 300° =$

b) $sen\ 120° =$	d) $sen\ 135° =$	f) $sen\ 210° =$	h) $sen\ 300° =$

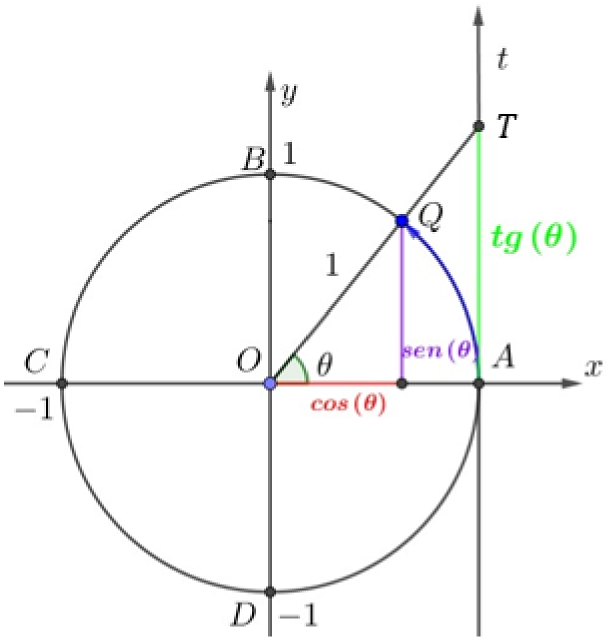
Nosso objetivo neste momento é relembrá-los que pela circunferência ser de raio unitário, para qualquer arco de medida angular x, tem-se

$$-1 \leq cos\, x \leq 1$$
$$-1 \leq sen\, x \leq 1,$$

mas essa mesma afirmação ocorre para qualquer medida angular de um arco.

Na figura abaixo, definimos o eixo real t como o eixo das tangentes, sendo a tangente do ângulo θ a medida do segmento $\overline{AT}$.

Figura 52: Reta da tangente.



Fonte: Autores (2023).

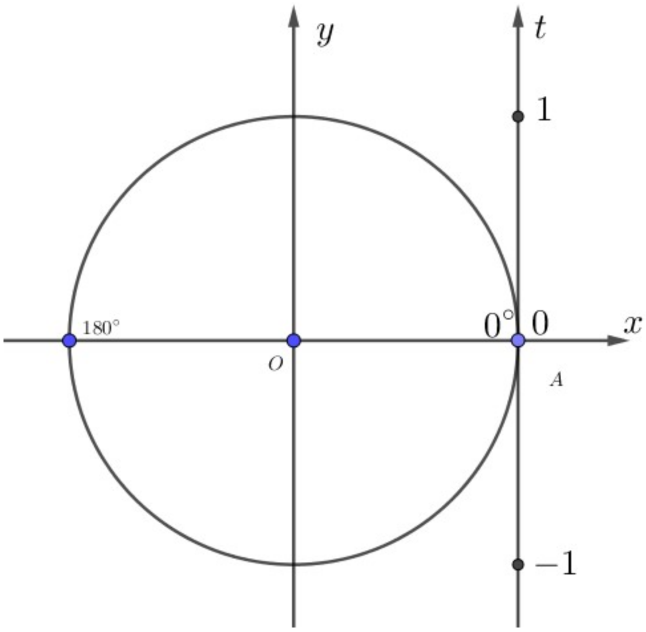
A partir dessa figura, queremos mostrar aos alunos que o ponto Q não pode coincidir com o ponto B e nem com o ponto D, pois os prolongamentos dos raios $\overline{OB}$ e $\overline{OD}$ não intercepta o eixo das tangentes. Por isso, dizemos que não existe tangente de um arco com extremidade em B ou em D, ou seja, se olharmos para a 1ª volta da circunferência, não existe um valor para $tg\ 90°$ e $tg\ 180°$. Nesse momento, vamos também explicar usando a tangente como razão entre seno e cosseno.

Definição de tangente $(tg\ \theta)$

Se um arco trigonométrico tem medida θ, com $\cos\theta \neq 0$, então: $tg\ \theta = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta}$.

Em seguida, como início ao estudo da variação de sinal para a tangente, começaremos com os ângulos 0° e 180°, perguntando aos alunos se sabem dizer qual o valor das tangentes desses dois ângulos. Os pontos A e C estão associados aos ângulos de 0° e 180°, para encontrar a tangente desses ângulos, traçando uma reta que passa por esses dois pontos e pelo centro da circunferência, essa reta intercepta o eixo t das tangentes no número real zero, logo $tg\ 0° = tg\ 180° = 0$.

Figura 53: Reta tangente com valores.



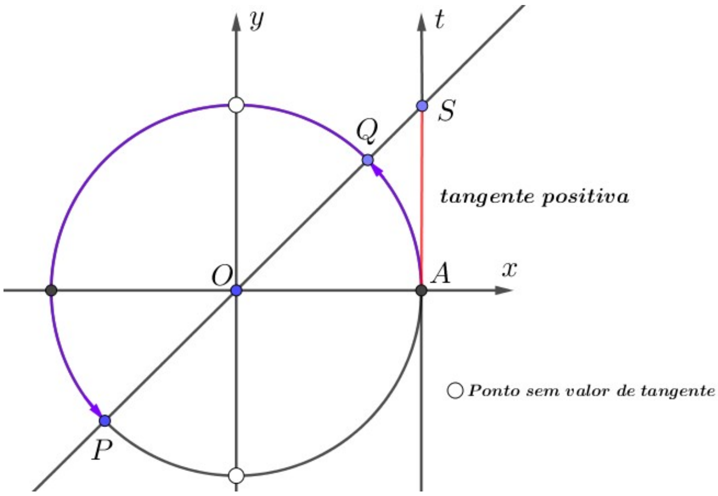
Fonte: Autores (2023)

Em seguida, vamos perguntar aos alunos o que poderíamos notar ao escolher dois pontos no primeiro e terceiro quadrante da circunferência e traçarmos uma reta que passe por esses dois pontos e pela origem e intersecte o eixo t. Queremos levá-los a observar que os valores das tangentes desses pontos na circunferência serão positivos. Em seguida, escolhendo dois pontos, agora nos quadrantes dois e quatro, as tangentes deles seriam negativas.

Variação de sinal da tangente

Se um arco trigonométrico tiver a extremidade no 1° ou no 3° quadrante, o prolongamento do raio que passa por essa extremidade interceptará o eixo das tangentes t em um ponto S de valor real positivo.

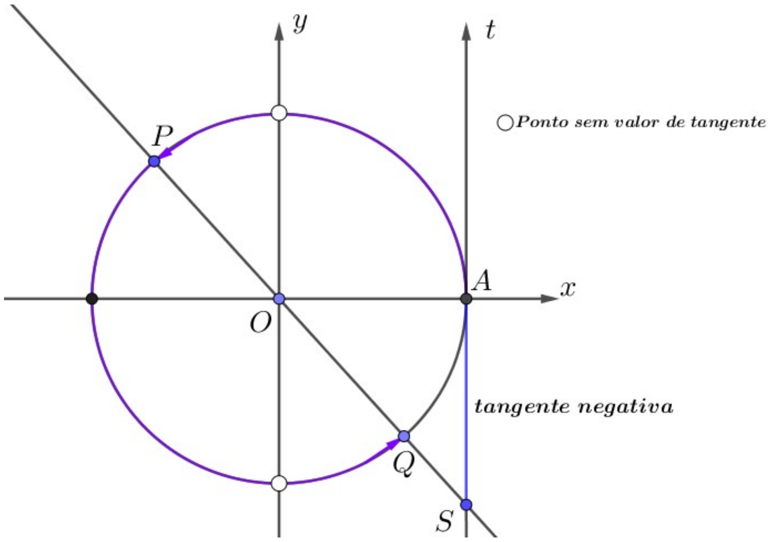
Figura 54: Ilustração de angulo com tangente positiva.



Fonte: Autores (2023)

Se um arco trigonométrico tiver a extremidade no 2° ou no 4° quadrante, o prolongamento do raio que passa por essa extremidade interceptará o eixo das tangentes t em um ponto S de valor real negativo.

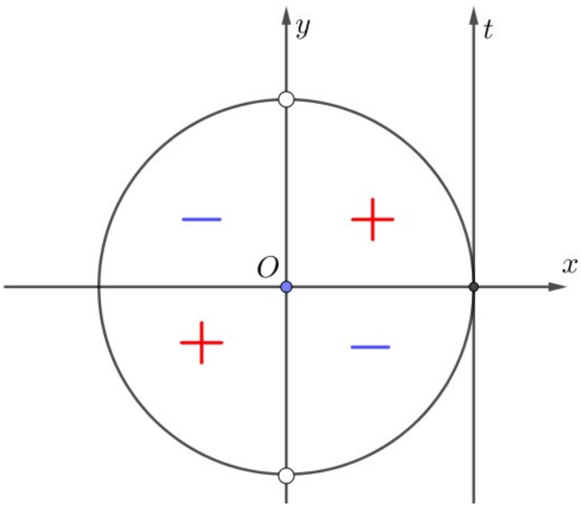
Figura 55: Ilustração angulo com tangente negativa.



Fonte: Autores (2023).

Logo, a tangente é positiva para os arcos do 1° e 3° quadrante e negativa para os arcos do 2° e 4° quadrante.

Figura 56: Ilustração dos sinais da tangente.



Fonte: Autores (2023).

Para ajudá-los os alunos na compreensão desses conceitos, vamos pedir que resolvam os seguintes exercícios retirados do livro matemática Paiva (2009, p. 70-73). Essas questões foram escolhidas por serem de simples aplicação da definição de tangente de um ângulo na circunferência trigonométrica. Deixaremos um tempo de 15 minutos para esta atividade. Após este tempo, convidaremos dois alunos que queiram apresentar suas resoluções no quadro e caso ninguém se ofereça, um estagiário corrigirá.

Exercícios - I

1) Determine, se existir:

a) $tg\ \pi$. b) $tg\ 360°$. c) $tg\ 270°$

2) Qual das alternativas abaixo apresenta uma expressão cujo resultado é um número positivo?

a) $tg\ 10° \cdot tg\ 100°$. b) $tg\ 140° \cdot tg\ 200°$. c) $\frac{tg\ 95°}{tg\ 130°}$

3) Determine o sinal do produto: $P = tg\ 13° \cdot tg\ 190° \cdot tg\ 352°$.

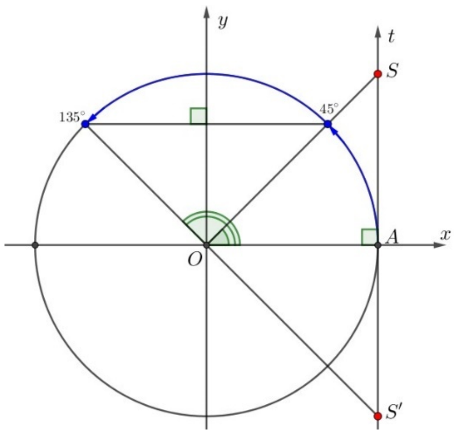
Redução ao 1° quadrante da tangente.

Na sequência, falaremos da tangente dos ângulos notáveis e dos seus valores associados em outros quadrantes. Semelhante ao estudo do seno e cosseno, explicaremos que ao conhecer a tangente de um arco trigonométrico em um dos quadrantes, através da simetria da circunferência, podemos encontrar a tangente correspondente desse arco em qualquer quadrante. Utilizaremos o seguinte exemplo como motivação.

Exemplo: Consultando o quadro trigonométrico dos arcos notáveis, determine o valor da $tg\ 135°$.

R: O correspondente do arco de 135°, no 1° quadrante é obtido fazendo a redução a esse quadrante: $180° - 135° = 45°$. Observe que dos triângulos retângulos formados AOS e AOS', concluímos que o valor da $tg\ 135°$ será negativo, sendo o oposto de $tg\ 45° = 1$, ou seja, $tg\ 135° = -1$.

Figura 57: Tangente do ângulo simétrico de 45° no segundo quadrante.



Fonte: Autores (2023).

Vamos propor as seguintes questões para os alunos praticarem a simetria e a redução ao primeiro quadrante com a tangente de arcos. Os estagiários percorrerão a sala atendendo eventuais dúvidas. Após 15 minutos, corrigiremos essas questões no quadro.

Exercícios – II

Consultando o quadro trigonométrico dos arcos notáveis, determine o valor de:
a) $tg\ 150°$.

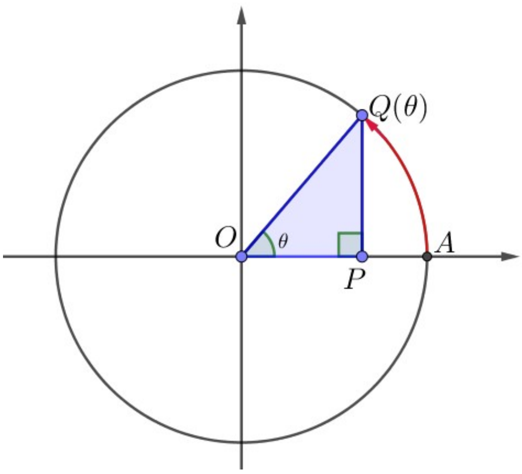
b) $tg\frac{4\pi}{3}$.

c) $tg\ 495°$.

2° Momento Relação fundamental da trigonometria. (50 min, até as 09:40)

Em seguida, vamos começar demonstrando a relação fundamental da trigonometria, em que a extremidade do arco de medida θ é um ponto do primeiro quadrante. Importante comentar que essa relação também permanece válida quando o ponto está nos outros três quadrantes.

Figura 58: Ilustração círculo trigonométrico.



Fonte: Autores (2023).

Considere θ a medida de um arco com extremidade no 1º quadrante, assim como na figura acima. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo OPQ, temos:

$$(\overline{OQ})^2 = (\overline{OP})^2 + (\overline{PQ})^2$$

Mas sabemos que na circunferência trigonométrica:

$$sen\ (\theta) = \overline{PQ};\ \cos(\theta) = \overline{OP} \text{ e } \overline{OQ} = 1$$

Logo, concluímos que

$$sen^2\,(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Relação fundamental trigonométrica

Dado um arco trigonométrico de medida θ, obtemos a chamada relação fundamental trigonométrica, dada por

$$sen^2\,(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Dessa relação, obtemos:

$$sen^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \text{ e } \cos^2(\theta) = 1 - sen^2\,(\theta)$$

Vamos apresentar o seguinte exemplo para que os alunos vejam uma aplicação dessa relação. Na sequência, vamos propor alguns exercícios para serem resolvidos até o horário do intervalo. O exemplo e os exercícios foram retirados do livro Matemática Paiva (2009, p. 58), escolhidos por serem de simples aplicação da relação.

Exemplo:

Dado que $sen\,\theta = \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, calcular o valor de $cos\,\theta$.

R: Da relação fundamental trigonométrica,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2(\theta) = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Aplicando raiz quadrada em ambos os lados,

$$\sqrt{\cos^2\theta} = \pm\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como θ é uma medida do $2°$ quadrante, concluímos que $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Exercícios – III

1) Calcule o valor de $cos\ \theta$, sabendo que $sen\ \theta = -\frac{1}{3}$ e que $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

2) Determine os valores de $sen\ \theta$, sabendo que $cos\ \theta = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

3) Determine os valores de $sen\ \theta$ e $cos\ \theta$ sabendo que $sen\ \theta = 3\ cos\ \theta$ e $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

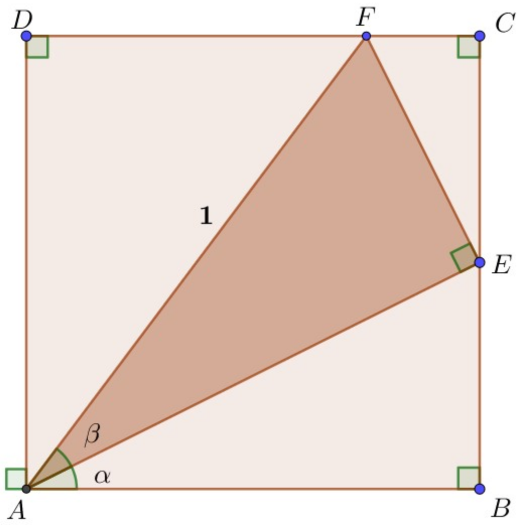
3° Momento Intervalo (20 min, até as 10:00)

5° Momento Seno, cosseno e tangente da soma (60 min, até as 11:00)

Utilizaremos 10 minutos para explicar a resolução dos exercícios anteriores e, na sequência, vamos começar a abordar o conteúdo de seno, cosseno e tangente da soma, já informando aos alunos que o caso da diferença é análogo. Vamos destacar a importância na distinção entre, por exemplo, $\cos\left(\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$ e $\cos\pi + \cos\frac{3\pi}{2}$, visto que essas duas somas não são iguais.

Seno, cosseno da soma demonstração

Considere um retângulo qualquer $ABCD$ e inscrito a ele um triângulo retângulo AEF com a medida da hipotenusa igual a um. Tome também o ângulo $\beta = F\hat{A}E$, interior a esse triângulo e o ângulo $\alpha = E\hat{A}B$.



Fonte: Autores (2023).

Primeiramente, vamos encontrar as medidas dos segmentos que compõem os lados do retângulo e do triângulo.

Segmento $\overline{EF}$:

$$sen\ (\beta) = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{EF}}{1} = \overline{EF}$$

$$\overline{EF} = sen\ (\beta)$$

Segmento $\overline{AE}$:

$$cos\ (\beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AE}}{1} = \overline{AE}$$

$$\overline{AE} = cos\ (\beta)$$

Segmento $\overline{BE}$:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{EB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EB}}{\cos(\beta)}$$

$$\overline{EB} = sen\ (\alpha)\cos(\beta)$$

Segmento $\overline{AB}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\cos(\beta)}$$

$$\overline{AB} = cos\ (\alpha)\cos(\beta)$$

O ângulo $F\hat{A}D$ mais os α e β formam $90°$.

Logo o ângulo:

$$F\hat{A}D = 90° - (\alpha + \beta).$$

Usando o fato de que a soma dos ângulos internos α, β e γ de um triângulo qualquer é sempre igual a $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, então

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$F\widehat{D}A + F\hat{A}D + A\hat{F}D = 180°$$
$$A\hat{F}D \ = 180° - F\widehat{D}A - F\hat{A}D$$
$$A\hat{F}D \ = 180° - 90° + (\alpha + \beta) - 90°$$
$$A\hat{F}D \ = \alpha + \beta$$

Segmento $\overline{AD}$:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AD}}{1} = \overline{AD}$$
$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \overline{AD}$$

Segmento $\overline{DF}$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{DF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DF}}{1} = \overline{DF}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \overline{DF}$$

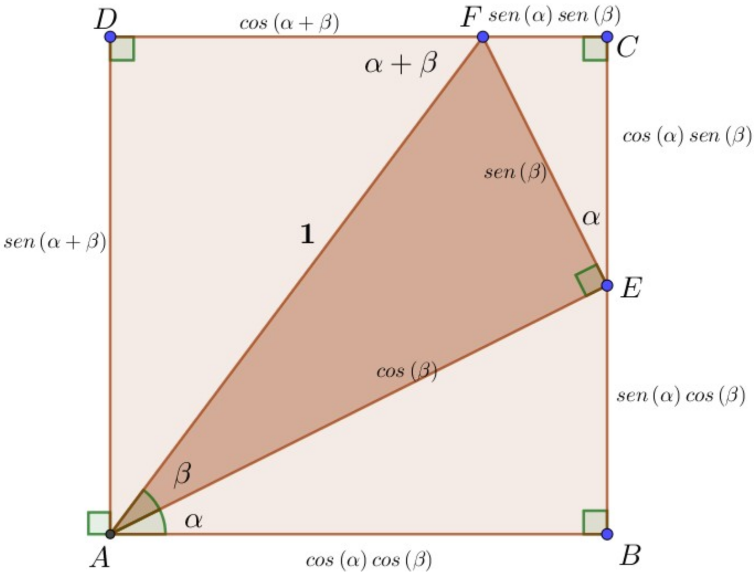
Note que o ângulo $A\hat{E}B + \alpha + 90° = 180°$, logo $A\hat{E}B = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Perceba também que ao somar $A\hat{E}B + A\hat{E}F + F\hat{E}C = 180°$, isto é, $F\hat{E}C = 180° - 90° + \alpha - 90° = \alpha$.

Segmento $\overline{CE}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{CE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CE}}{sen\ (\beta)}$$
$$\overline{CE} = \cos(\alpha)\ sen(\beta)$$

Segmento $\overline{CF}$:

$$\text{sen}\ (\alpha) = \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CF}}{sen\ (\beta)}$$
$$\overline{CF} = \text{sen}(\alpha)\ sen(\beta)$$



Fonte: Autores (2023).

Por esse retângulo $ABCD$ ter lados opostos de mesmo comprimento,

$$sen\ (\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\ sen(\beta) + sen\ (\alpha) \cos(\beta)$$

e

$$\cos(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha)\ sen(\beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta)$$
$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\ sen(\beta)$$

Definição – Adição e subtração de arcos

Dados dois arcos de medidas α e β, as fórmulas de adição e subtração de arcos são:

I) $\text{sen}\ (\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\ \text{sen}(\beta) + \text{sen}\ (\alpha) \cos(\beta)$

II) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\ \text{sen}(\beta)$

III) $\text{sen}\ (\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\ \text{sen}(\beta) - \text{sen}\ (\alpha) \cos(\beta)$

IV) $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\ \text{sen}(\beta)$

V) $\text{tg}\ (\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\ (\alpha) + \text{tg}\ (\beta)}{1 - \text{tg}\ (\alpha) \cdot \text{tg}\ (\beta)}$

VI) $\text{tg}\ (\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\ (\alpha) - \text{tg}\ (\beta)}{1 + \text{tg}\ (\alpha) \cdot \text{tg}\ (\beta)}$

Para auxiliar os alunos a compreenderem esses conceitos, vamos mostrar a resolução do exemplo abaixo. Em seguida, proporemos uma lista de exercícios (ver quadro abaixo). As duas últimas questões dessa lista foram retiradas do livro Matemática Paiva (2009, p. 83). Daremos um tempo de 20 minutos para esta atividade, e convidaremos alguns alunos a irem no quadro responder algumas das questões.

Exemplo: Calcule $\cos 75°$.

R: O arco de $75°$ é a soma dos arcos notáveis de $45°$ e $30°$. Consultando o quadro dos arcos notáveis temos,

$$\begin{aligned} sen\,(75°) &= sen\,(45° + 30°) = \cos(\alpha)\,sen(\beta) + sen\,(\alpha)\cos(\beta) \\ &= \cos(45°)sen(30°) + sen(45°)\cos(30°) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Exercícios – IV

1) Calcule os seguintes casos de adição e subtração de arcos.

a) $\cos(15°)$

b) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

c) $tg\,(105°)$

2) Sabendo que $sen\,a = \frac{3}{5}$ e que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos\left(\frac{\pi}{3} + a\right)$.

6° Momento Atividades finais (40 min, até as 11:40).

Para finalizar a aula, proporemos uma nova lista de exercícios. Diferente dos exercícios anteriores, selecionamos questões de vestibulares, saindo da aplicação direta de conceitos fundamentais e exigindo um pensamento mais aprofundado.

Lista de atividades

1) (UFPI modificada) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião

seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, é:

a) 600 metros

b) 700 metros

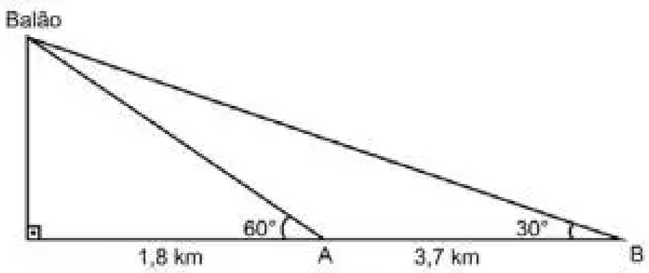
c) 1000 metros

d) 500 metros

e) 780 metros

2) (Enem 2010) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.



Fonte: Enem (2011)

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão

A. 1,8 km

B. 1,9 km

C. 3,1 km

D. 3,7 km

E. 5,5 km

3) (PUC-PR) Um determinado professor de uma das disciplinas do curso de Engenharia Civil da PUC solicitou como trabalho prático que um grupo de alunos deveria efetuar a medição da altura da fachada da Biblioteca Central da PUC usando um teodolito. Para executar o trabalho e determinar a altura, eles colocaram um teodolito a 6 metros da base da fachada e mediram o ângulo, obtendo 30º, conforme mostra figura abaixo.

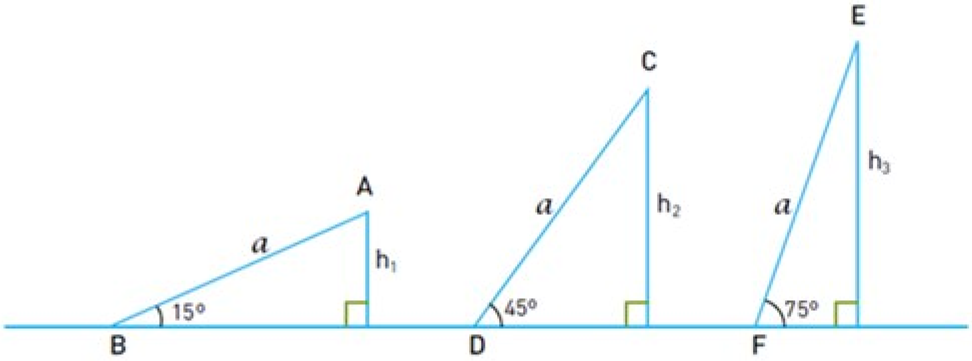
Fonte: PUC – PR.

Se a luneta do teodolito está a 1,70m do solo, qual é, aproximadamente, a altura da fachada da Biblioteca Central da PUC?

Dados (sen 30º = 0,5, cos 30º = 0,87 e tg 30º = 0,58)

a) 5,18 m.
b) 4,70 m.
c) 5,22 m.
d) 5,11 m.
e) 5,15 m

4)(UERJ- RJ – 2013) Um esqueitista treina em três rampas planas de mesmo comprimento a, mas com inclinações diferentes. As figuras abaixo representam as trajetórias retilíneas AB = CD = EF, contidas nas retas de maior declive de cada rampa.



Fonte: UERJ- RJ – 2013.

Sabendo que as alturas, em metros, dos pontos de partida A, C e E são, respectivamente, h_1, h_2 e h_3 , conclui-se que $h_1 + h_2$ é igual a:

A) $h_3\sqrt{3}$.

B) $h_3\sqrt{2}$.

C) $2h_3$.

D) h_3.

5)Determinar m, sendo m um número real, tal que $sen\,\beta = \frac{m}{6}$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{4m}}{3}$.

Como questão extra caso consigam terminar a lista a tempo, deixaremos a seguinte questão em lâminas do *Power point.* Essa questão foi retirada do livro Matemática Paiva (2009, p. 83), escolhida por aplicar os conceitos de soma e subtração de arcos.

Problema extra

(UFPR) A expressão $sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ é equivalente a:

a)$2\cos x$. b)$\cos x$. c)$sen\,x + \cos x$. d)$sen\,x - \cos x$. e) $\cos x - sen\,x$

R:

$$sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = sen\frac{\pi}{2}\cos x + sen\,x\cos\frac{\pi}{2} = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos x + sen\frac{3\pi}{2}\;sen\,x = -sen\,x$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos x - sen\,x$$

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou no quadro negro.

Referências:

PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2009. Vol. 2.

TRIGONOMETRIA, *Projeto Agatha e Edu*. 2019. Disponível em: https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-enem/matematica/trigonometria.php. Acesso em: 19 abr. 2023.

RAZÕES trigonométricas, *Projeto Agatha e Edu*. 2019. Disponível em: https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-enem/matematica/trigonometria.php. Acesso em: 19 abr. 2023.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. Exercícios sobre Seno, Cosseno e Tangente. *Brasil escola*. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-seno-cosseno-tangente.htm#questao-1. Acesso em: 19 abr. 2023.

QUESTÃO 40. Universidade Estadual do Rio de Janeiro - UERJ. *Vestibular* 2013. 2° Exame de Qualificação. Disponível em: https://www.vestibular.uerj.br/wp-content/uploads/2019/04/2013_2eq_prova.pdf. Acesso em: 19 abr. 2023.

3.8.1. **Relatório – 13/05/2023**

Relatório 8 - Sala A205

No dia treze de maio de 2023, foi realizado o oitavo encontro do Promat, contando com a presença de 13 alunos em uma manhã um pouco fria, porém ensolarada. O conteúdo da aula foi: Variação de sinal da tangente; Relação fundamental da trigonometria; seno, cosseno e tangente da soma de arcos. A aula teve início aproximadamente as oito horas e cinco minutos.

O primeiro assunto da aula foi a retomada do estudo do sinal do seno e cosseno. Utilizamos o projetor multimídia para mostrar alguns gráficos. Os alunos apenas ouviam enquanto apresentávamos, sem manifestar dúvidas ou asserções durante este período. Propomos uma atividade para os alunos calcularem o seno e o cosseno de ângulos em graus e radianos, e observamos que a maioria conseguiu sem problema, com exceção de uma aluna que não compareceu a aula anterior, o que demandou nosso auxílio. Passado esta etapa, apresentamos o estudo da variação do sinal da tangente, seguindo argumentos parecidos com os casos do seno e cosseno. Uma atividade prática foi proposta e, conforme os alunos trabalhavam, percorremos a sala auxiliando-os quando necessário. Realizamos também um estudo sobre a redução ao primeiro quadrante no caso da tangente, demandando mais tempo do que o previsto para esta parte da aula, que precisou ser interrompida devido o horário do intervalo.

Após o intervalo, houve outro contratempo, que foi a demora dos alunos para retornarem para a sala de aula. O atraso foi de quase quinze minutos, sendo necessário chamar a atenção deles para que se mantivessem mais atentos ao tempo do intervalo. Após finalizar rapidamente o conteúdo que havia ficado sem conclusão antes do intervalo, prosseguimos a aula com o estudo da relação fundamental da trigonometria, novamente utilizando o método de apresentar o conceito e propor exercícios práticos na sequência. Alguns alunos apresentaram dúvidas pontuais sobre a aplicação dos conceitos, mas a maioria não precisou de ajuda para resolver as atividades. Passamos o resto da aula falando sobre seno, cosseno e tangente da soma e diferença de ângulos, terminando de explicar estes tópicos faltando menos de 15 minutos para o final da aula. Foram aplicadas as atividades restantes, mas como o tempo estava apertado não foi possível resolver todos os exercícios propostos.

Acreditamos que os conceitos foram entendidos pelos alunos, mas é necessário enfatizar os conceitos para que eles sejam assimilados por eles.

3.9. **Plano de aula – 9º Encontro 20 maio 2023.**

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdo: Funções Trigonométricas.

Objetivo geral: Promover a compreensão das funções trigonométricas, incrementando os conceitos de trigonometria apresentados nas últimas aulas, associando funções com eventos periódicos. Além disso, trabalhar a capacidade de resolver problemas envolvendo esse conceito.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Compreender e identificar as funções *seno*, *cosseno* e *tangente*;
- Analisar e diferenciar o gráfico dessas funções trigonométricas;
- Determinar o domínio, a imagem e o período dessas funções;
- Analisar a influência dos parâmetros em cada função;
- Aplicar os conceitos de funções trigonométricas na resolução de problemas.

Tempo de execução: Uma aula com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: Quadro negro**,** *notebook*, projetor multimídia, *PowerPoint, Geogebra* e folhas de papel sulfite.

Encaminhamento metodológico:

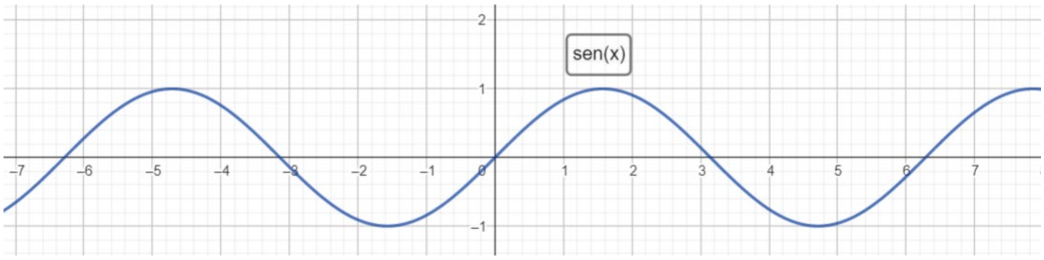
1° Momento Correção de atividades da aula passada. (20 min, até 08:20)

Para começar, realizaremos a correção das cinco atividades finais que ficaram sem solução no último encontro. Essas questões serão apresentadas em slides do *Power Point*. Se necessário, o exercício será resolvido passo a passo no quadro.

2° Momento Contextualização da aplicação real das funções. (15 min, até as 08:35)

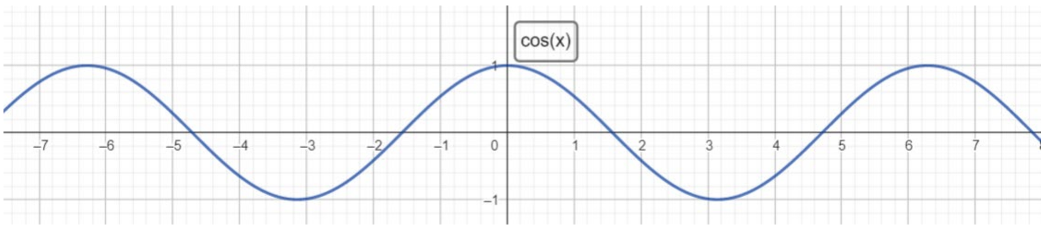
Iniciaremos este momento mostrando para os alunos em *slide* os gráficos das funções seno e cosseno, para que eles vejam como é o comportamento dos gráficos dessas funções. Em seguida, apresentaremos uma aplicação dessas funções em nosso cotidiano.

Figura 59: Gráfico da função seno.



Fonte: Autores (2023).

Figura 60: Gráfico da função cosseno.

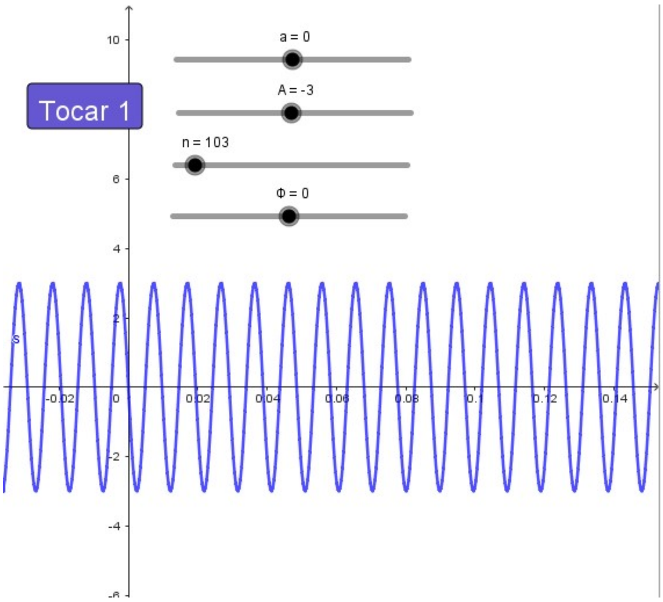


Fonte: Autores (2023).

Em seguida, mostraremos um exemplo de aplicação das funções trigonométricas na música, estudando a frequência do som. Utilizaremos a opção te "TocarSom" presente no Geogebra para emitir os sons de duas frequências distintas.

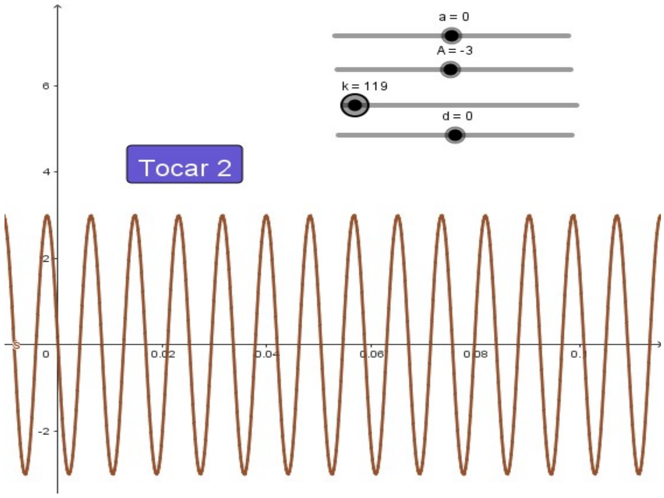
Os dois sons serão tocados juntos, o primeiro com uma frequência maior e o segundo com uma frequência menor. Quando o primeiro estiver perto de terminar, será aumentado a frequência do segundo para igualar com a frequência do primeiro, semelhante a como ocorre na discoteca pelo DJ.

Figura 61: Primeiro som programado.



Fonte: Autores (2023).

Figura 62: Segundo som programado.



Fonte: Autores (2023).

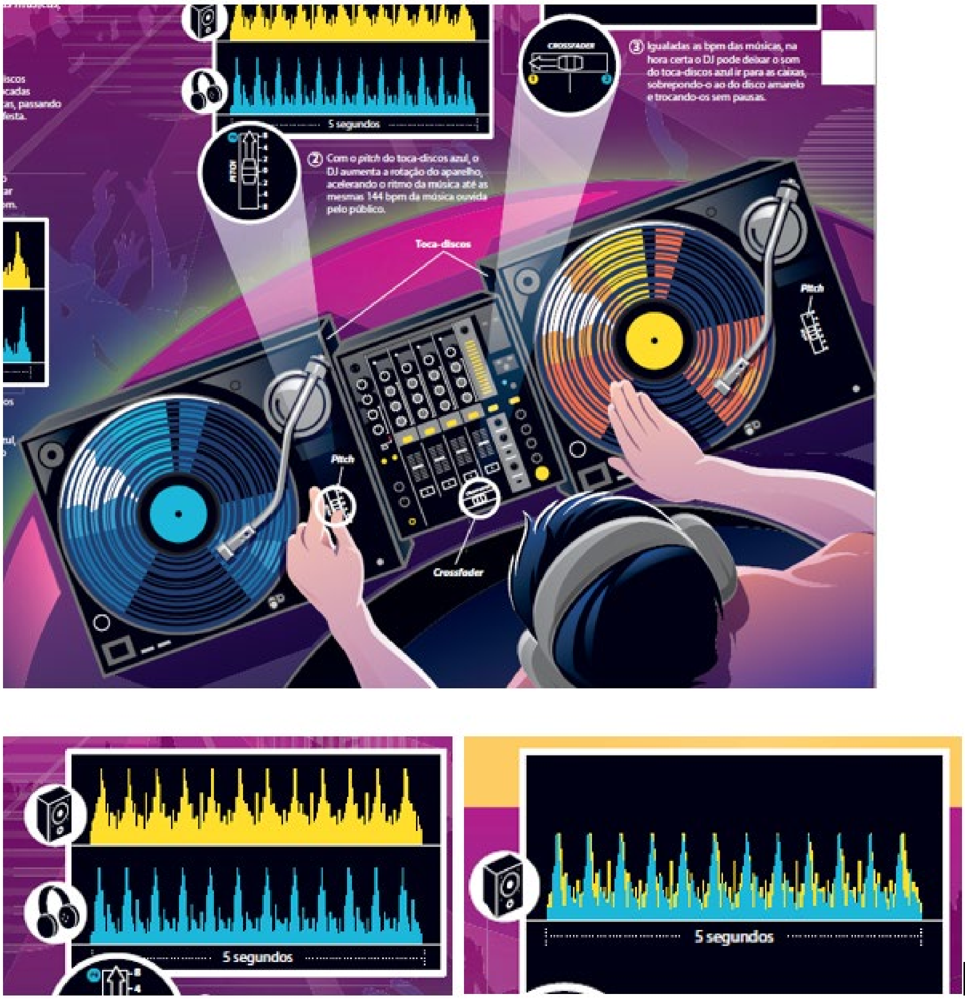
Exemplo de aplicação de funções trigonométricas

O movimento dos planetas, as marés, as estações do ano, as fases da Lua são fenômenos que se repetem em intervalos iguais de tempo, por isso, chamados de fenômenos periódicos. Esses fenômenos podem ser modelados por funções trigonométricas.

Uma aplicação interessante é na Discotecagem, onde é utilizado o conceito de BPM (batidas por minuto). No estudo da frequência do som, medimos o número de ciclos de uma onda sonora em *Hertz* (ciclos por segundo), em que 1 Hertz equivale a 60 BPM.

Um DJ (*disc jockey*) pode tocar por horas, sobrepondo o fim de uma música ao começo da outra, sem pausas ou mudanças de ritmo. Para isso, ele controla o movimento periódico dos vinis nos toca-discos e, consequentemente, a velocidade das batidas das músicas, sincronizando seus ritmos.

Figura 63: Imagem de DJ tocando em uma mesa de som.

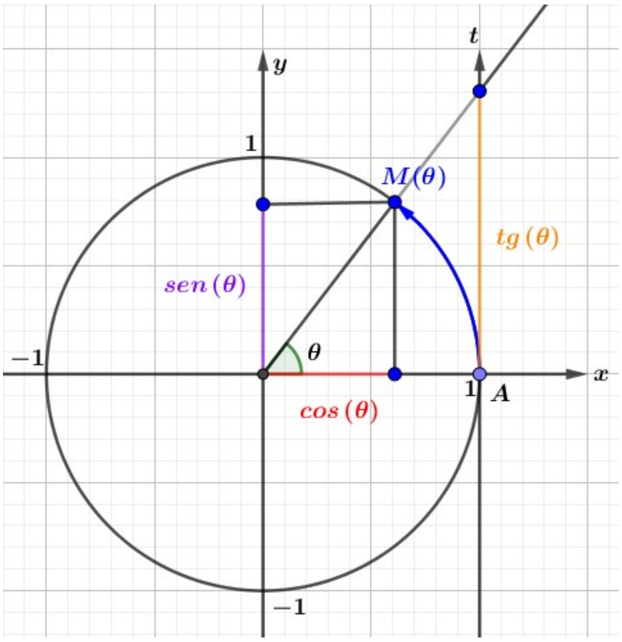


Fonte: Manoel Paiva (2015, p104-105).

3° Momento Introdução as funções e construção do gráfico. (65min, até as 09:40)

Vimos anteriormente que dado um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida angular θ, dizemos que as coordenadas x e y da extremidade (ponto M) desse arco são, respectivamente, o cosseno e seno do ângulo θ. Desse modo, se tornou possível associar a cada ponto da circunferência trigonométrica um par ordenado (x, y) do plano cartesiano.

Figura 64: Círculo trigonométrico.



Fonte: Autores (2023).

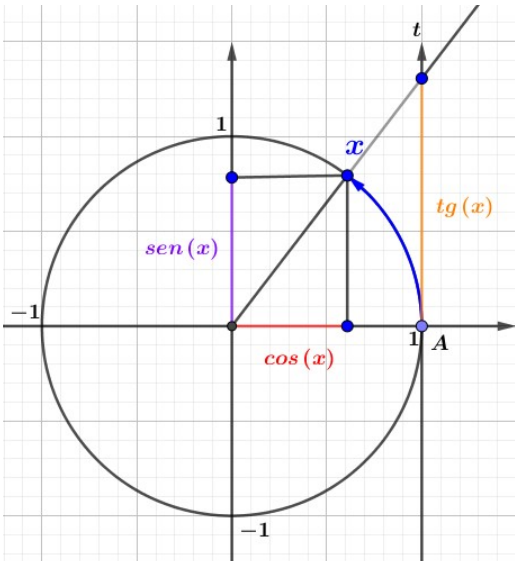
Estudamos que as medidas do ângulo θ podem ser dadas em graus ou em radianos, mas agora também vamos considerar uma associação entre um número real e um ponto da circunferência trigonométrica.

Associação entre um número real e um ponto da circunferência trigonométrica

Considerando qualquer medida em radianos, podemos associar essa medida ao número real que a representa, por exemplo:

- a medida $2\ rad$ com o número real 2;
- a medida $\frac{\pi}{2}\ rad$ com o número real $\frac{\pi}{2}$;
- a medida $4\pi\ rad$ com o número 4π;
- a medida de $x\ rad$ com o número real x;

entre outros.



Fonte: Autores (2023).

Assim, a cada número real x, podemos associar um único número real seno de x, um único número real cosseno de x e, satisfeitas as condições de existência, um único número real tangente de x.

Com isso, podemos definir funções que usam seno, cosseno e tangente e que atendem a definição de função. Vamos começar relembrando os alunos sobre o conceito de função, explicando brevemente a associação entre um elemento do domínio com um único elemento do contradomínio e, em seguida, formalizar as funções seno, cosseno e tangente.

Relembrando – Definição de função

Considere dois conjuntos A e B. Uma função $f: A \rightarrow B$ (f de A em B) é uma relação formada por três partes:

I) O conjunto A, que será chamado de **domínio** da função $(A = Dom(f))$;

II) O conjunto B, que será chamado de **contradomínio** da função $(B = CD(f))$;

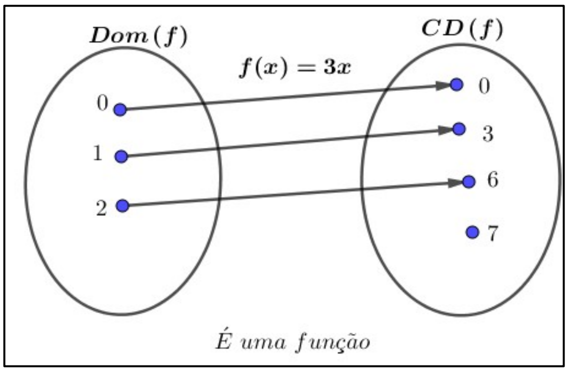
III) Uma regra no formato $y = f(x)$, que permite associar **todo** elemento x pertencente ao conjunto A, com **um único** elemento y pertencente ao conjunto B, chamada de **lei de formação**.

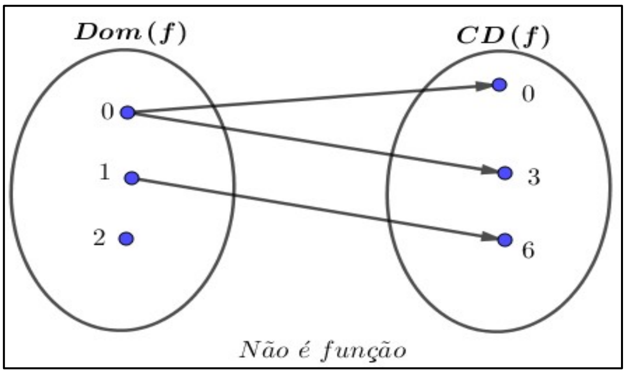
Dentro do contradomínio existe um subconjunto chamado de **imagem** da função $Im(f)$, formado pelos elementos de B que se relacionaram com algum valor x do domínio.

Usando o *diagrama de flechas*, uma função atenderia as seguintes condições:

1°) de todos os pontos do domínio sai uma flecha;

2°) de cada ponto do domínio sai somente uma única flecha.





No plano cartesiano, o eixo x representaria os pontos do domínio da função, enquanto o eixo dos y os pontos do contradomínio da função.

Apresentaremos na sequência a ideia de funções trigonométricas, também usando o diagrama de flechas para depois construir com os alunos o gráfico da função.

Funções trigonométricas

Consideremos as funções trigonométricas f, g e h como indicadas abaixo:

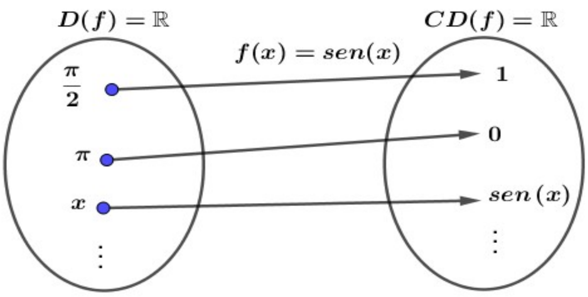
$f(x) = sen\ (x)$

$D(f) = \mathbb{R}$

$CD(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | -1 \leq y \leq 1\}$

Figura 65: Diagrama de flechas da função seno.



Fonte: Autores (2023).

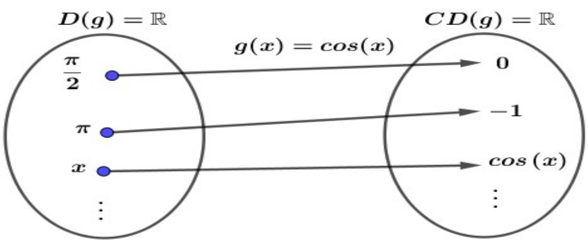
$g(x) = cos\ (x)$

$D(f) = \mathbb{R}$

$CD(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | -1 \leq y \leq 1\}$

Figura 66: Diagrama de flechas da função cosseno.



Fonte: Autores (2023).

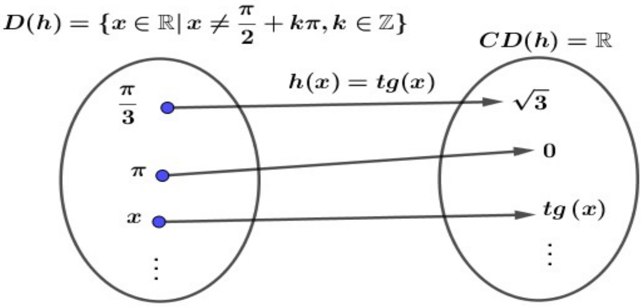
$h(x) = tg(x)$

$D(h) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$CD(h) = \mathbb{R}$

$Im(h) = \mathbb{R}$

Figura 67: Diagrama de flechas da função tangente.



Fonte: Autores (2023).

Note que todos os números do domínio de $f(x) = sen(x)$, $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = tg\,(x)$ possuem um e somente um correspondente no contradomínio. Além disso, $D(h)$ representa o conjunto formado por todos os números reais, exceto aqueles onde não existe valor de tangente.

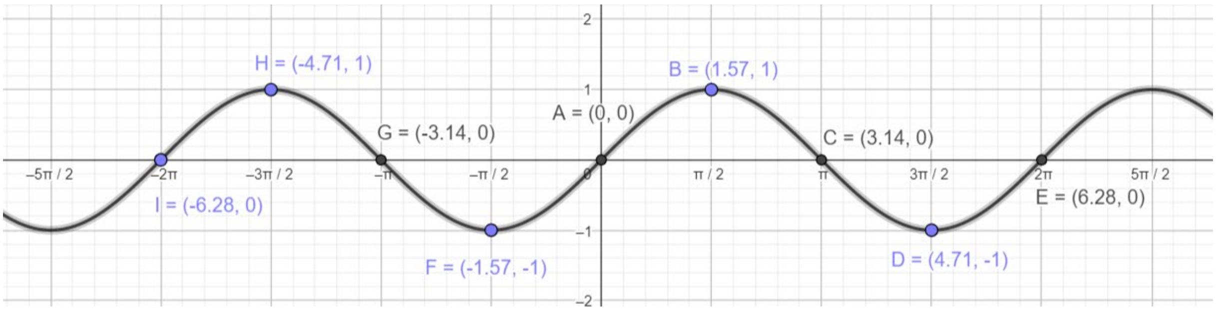
Em seguida mostraremos a sala que, uma vez conhecida a função, podemos escrever o gráfico desta, assim, construiremos o gráfico de uma função seno como exemplo, usaremos uma tabela e o gráfico no quadro, ou apresentaremos no slide, dependendo do tempo disponível.

Figura 68: Quadro da função seno.

x	$f(x) = sen(x)$	y
0	$f(0) = sen(0)$	0
$\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1
π	$f(\pi) = sen(\pi)$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	-1
2π	$f(2\pi) = sen(2\pi)$	0

Fonte: Autores (2023).

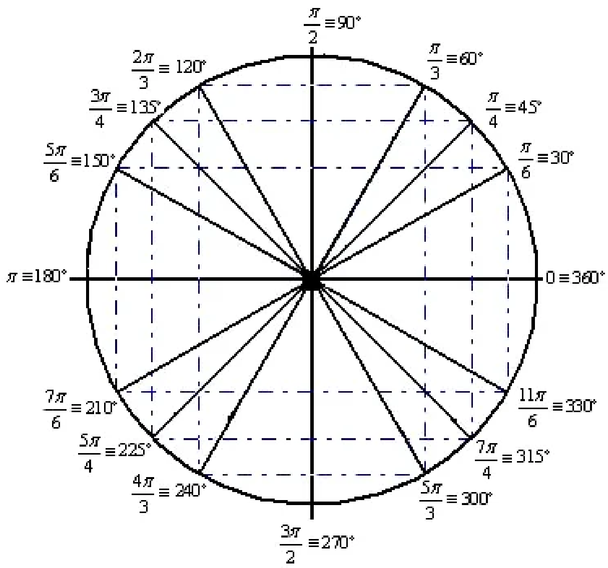
Figura 69: Gráfico da função seno.



Fonte: Autores (2023).

Após expormos o processo de construção do gráfico de maneira detalhada, vamos pedir para que os alunos construam o gráfico da função cosseno. Para isso, entregaremos réguas para os alunos que precisarem, e deixaremos a circunferência trigonométrica projetada em slide para facilitar.

Figura 70: Círculo trigonométrico.



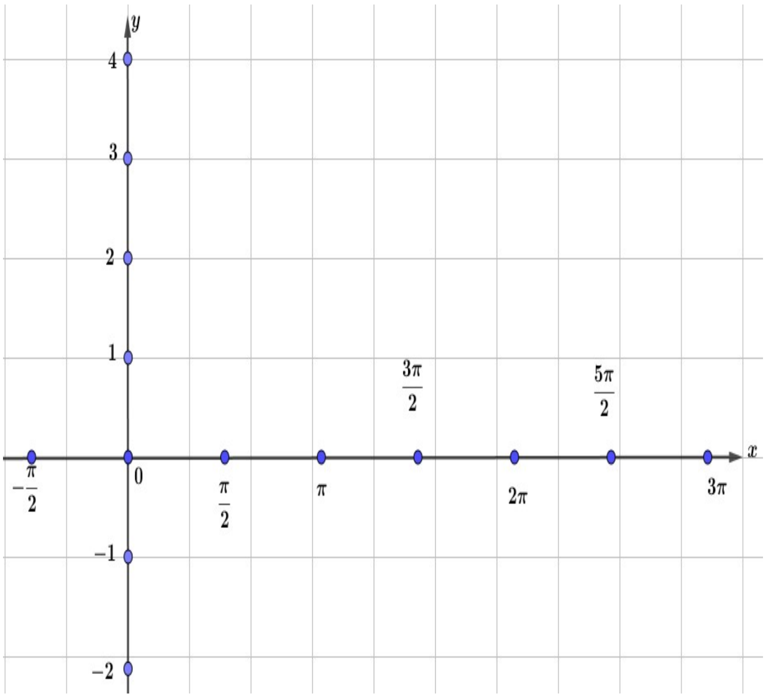
Fonte: ASTH, Rafael.

Exercício I:

1) Esboçar o gráfico da função $f(x) = cos(x)$.

Figura 71: Quadro para exercício.

x	$f(x) = cos(x)$	y



Fonte: Autores (2023).

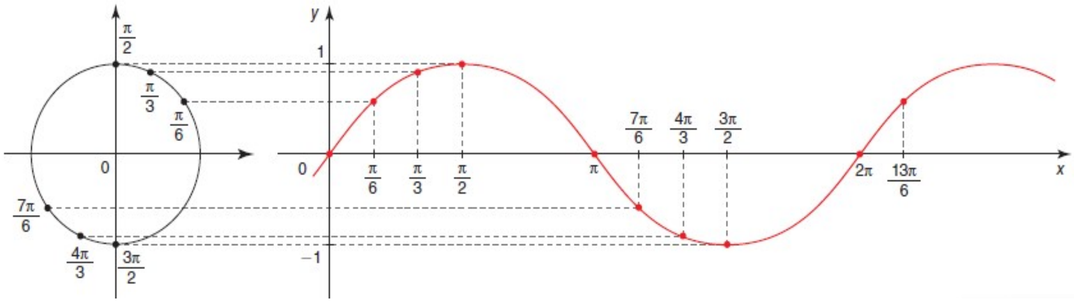
Para encerrar este momento, falaremos sobre a função tangente, mostrando no slide. Em seguida, mostraremos o gráfico no *Software GeoGebra*.

4º Momento Intervalo (20 min, até as 10:00)

5º Momento Funções seno e cosseno. Período e imagem. (60 min, até as 11:00)

Retomaremos o conteúdo com a imagem abaixo do gráfico da função $f(x) = sen\ (x)$. Observaremos que o gráfico da função é formado conforme x assume todos os valores de uma volta completa da circunferência trigonométrica. Por isso, chamamos essa função de periódica, com período 2π.

Figura 72: Gráfico da função seno.



Fonte: Manoel Paiva (2009, p.89)

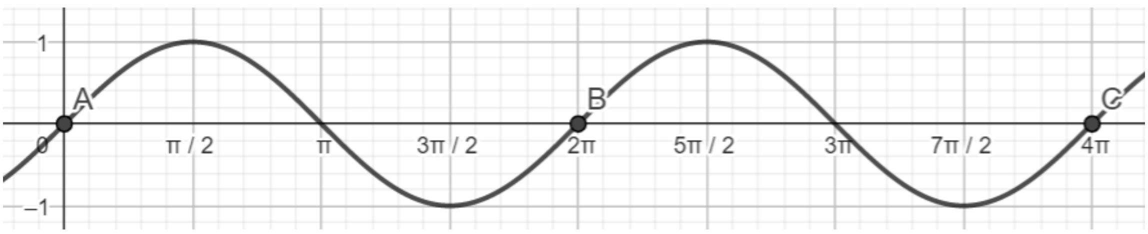
Em outras palavras, a função $f(x) = sen\ (x)$ é periódica porque existe um número real positivo ρ que satisfaz $sen(x+\rho) = sen\ (x)$, para todo x real, por exemplos, $sen(x+2\pi) = sen\ (x)$; $sen\ (x+4\pi) = sen(x)$ e $sen\ (x+6\pi) = sen\ (x)$.

O menor número real positivo que satisfaz essa condição é chamado de período da função $f(x) = sen\ (x)$.

Período da função seno $\boldsymbol{f(x) = sen\ (x)}$.

Dizemos que o período da função seno $f(x) = sen\ (x)$ é $\rho = 2\pi$, pois esse é o menor número real positivo que satisfaz a propriedade $sen(x+\rho) = sen\ (x)$, para todo x real. Observando no gráfico:

Figura 73: Função seno.



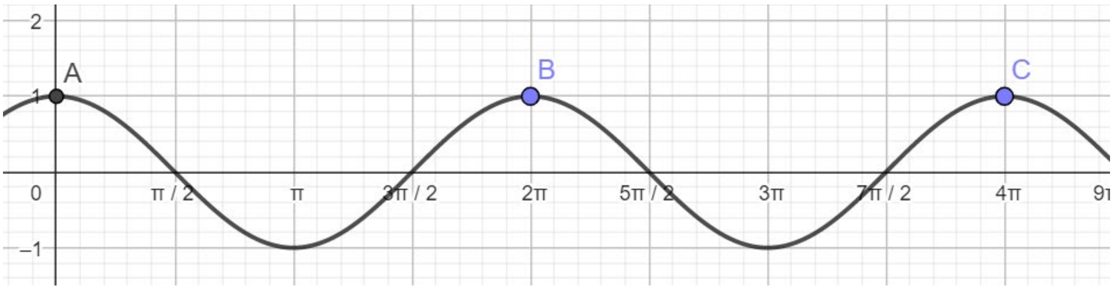
Fonte: Autores (2023).

Em seguida, mostraremos o período da função cosseno $g(x) = \cos(x)$ e da função tangente $h(x) = tg(x)$.

Período da função cosseno:

Dizemos que o período da função seno $g(x) = cos\ (x)$ é $\rho = 2\pi$, pois esse é o menor número real positivo que satisfaz a propriedade $cos(x + \rho) = cos\ (x)$, para todo x real. Observando no gráfico:

Figura 74: Função cosseno.

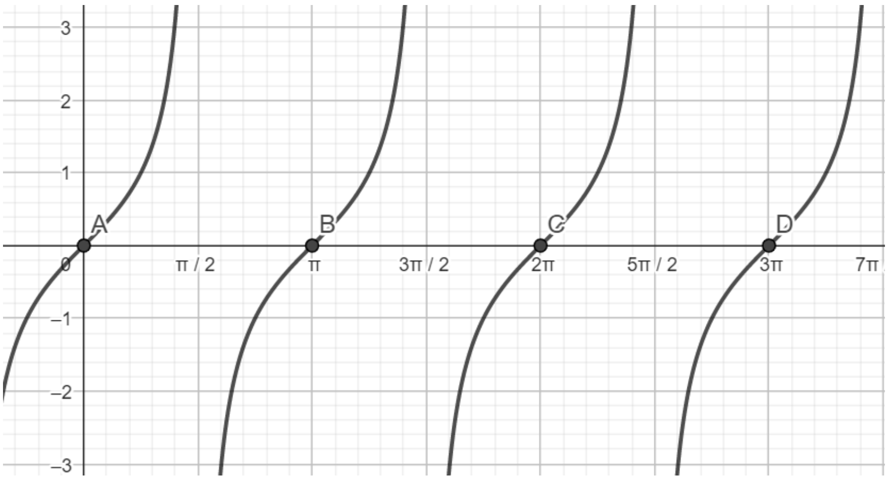


Fonte: Autores (2023).

Período da função tangente:

Dizemos que o período da função tangente $h(x) = tg\ (x)$ é $\rho = \pi$, pois esse é o menor número real positivo que satisfaz a propriedade $tg(x + \rho) = tg\ (x)$, para todo x real. Observando no gráfico:

Figura 75: Função tangente.



Fonte: Autores (2023).

Em seguida, mostraremos os parâmetros de uma função trigonométrica e a influência deles sobre a imagem, período e deslocamento no eixo x.

Calculando o período de uma função trigonométrica

Estudando as funções f e g em suas formas gerais:

$$f(x) = a \cdot sen(bx + c) + d$$

$$g(x) = a \cdot cos(bx + c) + d$$

Os componentes a, b, c e d são chamados de **parâmetros** da função e são números reais, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Fazendo a medida $bx + c$ assumir todos os valores reais associados a uma volta completa da circunferência obtemos o período. Por exemplo, se essa medida assume valores entre 0 e 2π, então

$$0 \leq bx + c \leq 2\pi \Rightarrow -c \leq bx \leq 2\pi - c.$$

Para $b > 0$,

$$-c \leq bx \leq 2\pi - c \Longrightarrow -\frac{c}{b} \leq x \leq \frac{2\pi - c}{b}.$$

Assim, o período ρ da função é a diferença entre o maior e menor valor obtido para x, nessa ordem, logo

$$\rho = \frac{2\pi - c}{b} - \left(-\frac{c}{b}\right) \Longrightarrow \rho = \frac{2\pi}{b}.$$

Para $b < 0$,

$$-c \leq bx \leq 2\pi - c \Longrightarrow -\frac{c}{b} \geq x \geq \frac{2\pi - c}{b}.$$

Calculando o período ρ:

$$\rho = \left(-\frac{c}{b}\right) - \frac{2\pi - c}{b} \Longrightarrow \rho = -\frac{2\pi}{b}.$$

De maneira geral, para $b \in \mathbb{R}$,

$$\rho = \frac{2\pi}{|b|}.$$

Procedendo de maneira análoga, podemos concluir o seguinte:

Cálculo do período da função trigonométrica

Considere as funções trigonométricas $f(x) = a \cdot sen\,(bx + c) + d$, $g(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$ e $h(x) = a \cdot tg(bx + c) + d$, em que a, b, c e d são números reais, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ (parâmetros). Para encontrar o período das funções $f(x)$ e $g(x)$, utiliza-se a fórmula

$$\rho = \frac{2\pi}{|b|}.$$

Para a função $h(x) = a \cdot tg(bx + c) + d$, o período é dado por

$$\rho = \frac{\pi}{|b|}.$$

Como exemplo, vamos mostrar a seguinte questão da UFPI – Universidade Federal do Piauí. Essa questão foi escolhida por ser de simples aplicação da fórmula.

Exemplo

(UFPI) O período da função $f(x) = 5 + sen\,(3x - 2)$ é:

a) 3π
b) 2π/3
c) 3π – 2
d) π/3 – 2
e) π/5

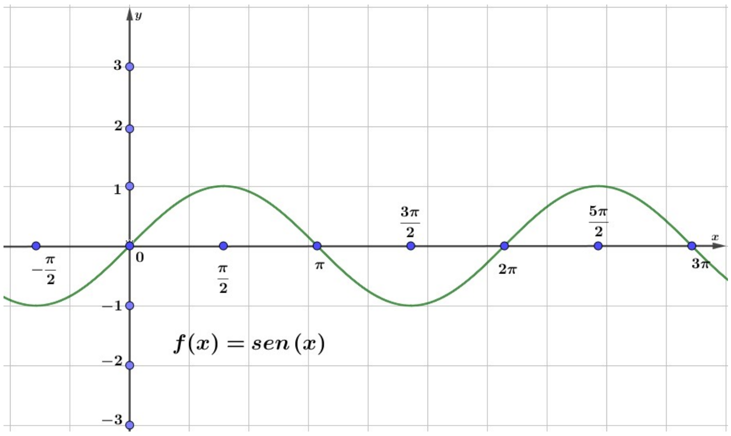
R: Como o parâmetro que multiplica x é o 3, então

$$\rho = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

Parâmetros de uma função trigonométrica

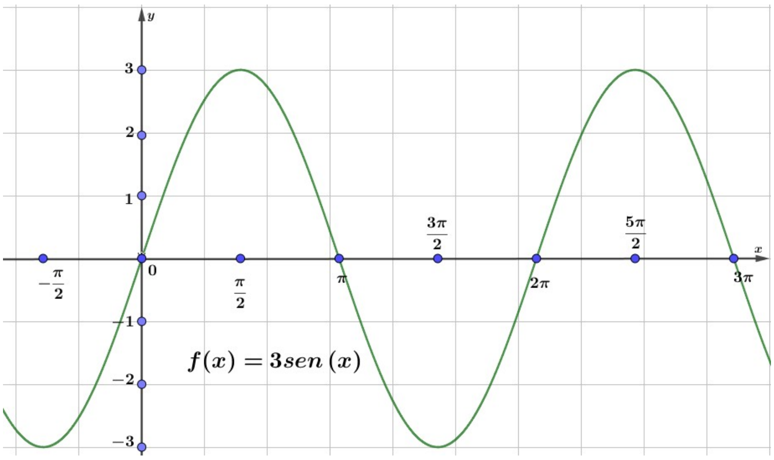
Mostraremos graficamente, com o auxílio do *software Geogebra,* como modificações nos parâmetros alteram a forma do gráfico das funções trigonométricas.

Figura 76: Função seno $f(x) = a \cdot sen(bx + c) + d$



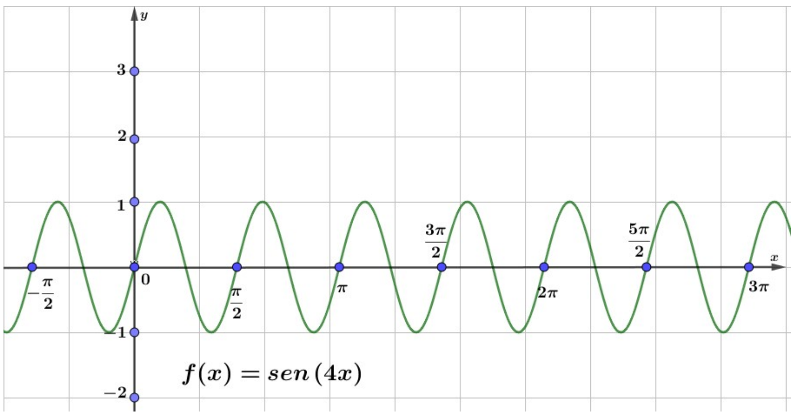
Fonte: Autores (2023).

Figura 77: Variação a para $f(x) = a \cdot sen(bx + c) + d$



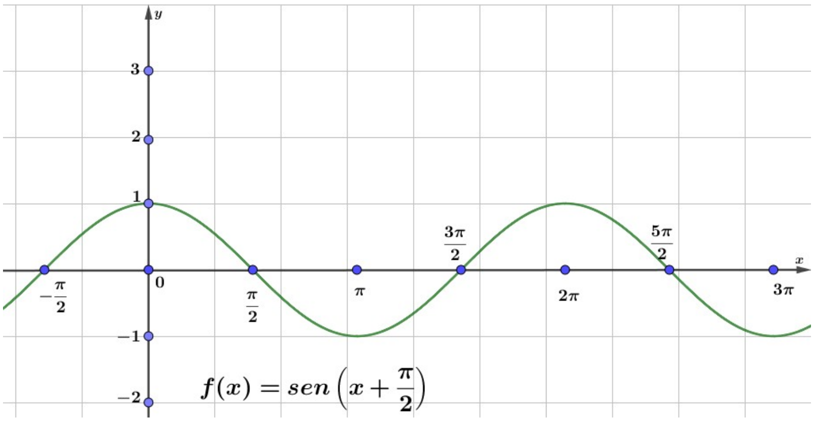
Fonte: Autores (2023).

Figura 78: Variação b para $f(x) = a\ sen(bx$+c$) + d$



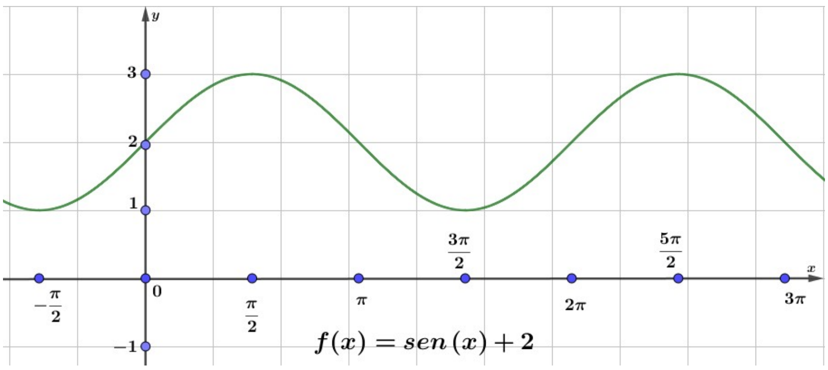
Fonte: Autores (2023).

Figura 79: Variação c para $f(x) = a\ sen(bx + c) + d$



Fonte: Autores (2023).

Figura 80: Variação d para $f(x) = a\ sen(bx + c) + d$



Fonte: Autores (2023).

Parâmetros de uma função trigonométrica

Considere as funções trigonométricas com seus parâmetros:

$$f(x) = a \cdot sen(bx + c) + d$$

$$g(x) = a \cdot cos(bx + c) + d$$

$$h(x) = a \cdot tg(bx + c) + d$$

Os parâmetros a, b, c e d nas funções influenciam em:

- a: Multiplica todos os valores do gráfico pelo seu valor em relação ao eixo y

Ex: Para $f(x)$ e $g(x)$, temos: $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y = -a \leq y \leq a\}$

- b: Muda o período da função. De modo geral, o período fica $p = \frac{pA}{|b|}$ com pA sendo o período anterior.

Ex: $v(x) = \cos(-5x)$; $b = -5 \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|-5|} = \frac{2\pi}{5}$

- c: Faz com que ocorra um deslocamento para a direita ou esquerda em relação ao eixo x.
- d: desloca a função para cima ou para baixo no eixo y.

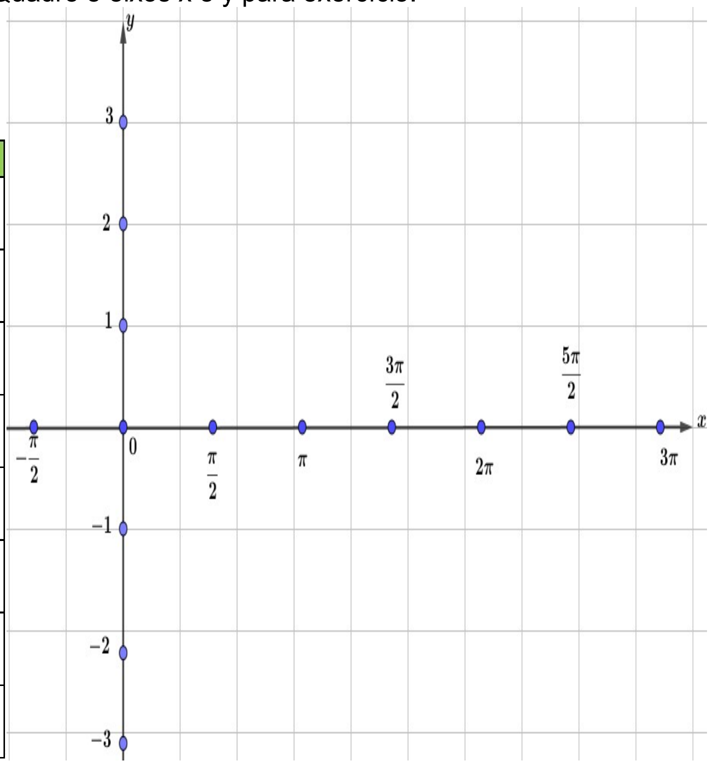
Em seguida, proporemos alguns exercícios para praticarem esses conceitos. Disponibilizaremos um tempo de 15 minutos para responderem e na sequência, um dos estagiários vai corrigir no quadro. Importante comentar aos alunos que eles podem usar quaisquer valores notáveis conhecidos para aplicar nessas funções e construir seus gráficos.

Exercícios II:

1) Construa o gráfico da função $f(x) = 3cos(x)$. Determine a imagem e o período

Figura 20: Quadro e eixos x e y para exercício.

x	$f(x)$	y



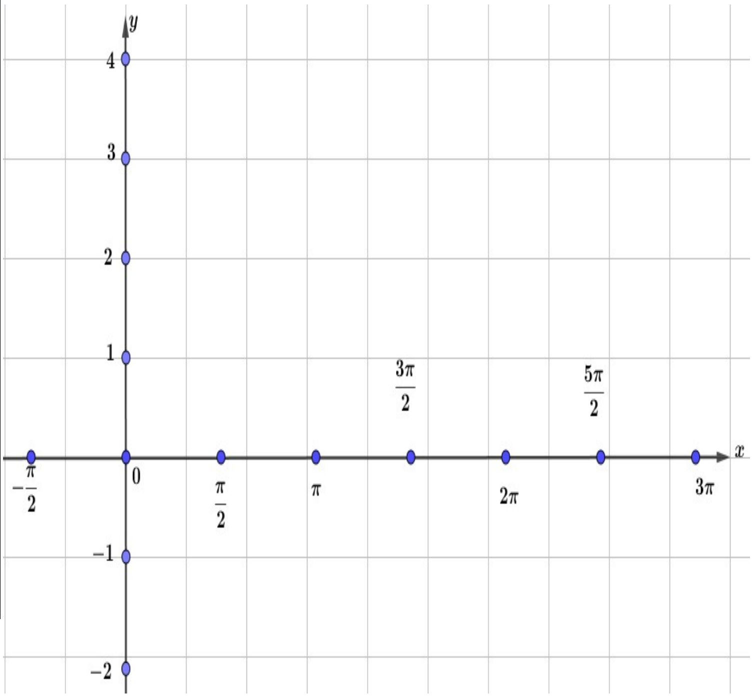
Fonte: Autores (2023).

2) Construa o gráfico da função $f(x) = sen(2x) + 1$, determine a imagem e o

período.

Figura 21: Tabela e eixos x e y para exercício.

x	$f(x)$	y



Fonte: Autores (2023).

6° Momento Jogo da memória. (40min, até as 11:40)

Para praticar os conceitos estudados de forma descontraída, vamos propor um jogo de memória adaptado para o conteúdo deste encontro.

Os alunos se enfrentarão em duplas, com as cartas viradas na mesa, um aluno por veze alternando entre eles quem irá virar duas cartas, caso estas duas cartas viradas seja uma a resposta da outra, ou seja, tem relação entre elas, então o aluno que virou fica com estas duas cartas para si, tirando-as do jogo, e pode virar mais duas cartas, no fim o aluno que tiver mais cartas ganha o jogo.

Este jogo poderá ou não ter premiação para o aluno que ganhar.

Figura 22: Cartas do jogo.

$f(x) = sen(x)$ $P = ?$	$P = 2\pi$	$f(x) = sen(x)$ $f(\frac{\pi}{6}) = y$
$f(x) = sen(\frac{1}{2}x)$ $P = ?$	$P = \pi$	$y = \frac{1}{2}$
$f(x) = cos(3x)$ $P = ?$	$P = \frac{2\pi}{3}$	$f(x) = 2cos(x)$ $f(\frac{\pi}{6}) = y$
$f(x) = 7sen(x)$ $\text{Im} = ?$	$\text{Im} =$ $\{y \in \mathbb{R} \mid y = -7 \leq y \leq 7\}$	$y = \sqrt{3}$
$f(x) = cos(4x)$ $P = ?$	$P = \frac{2\pi}{4}$	$f(x) = tan(x)$ $f(\frac{\pi}{4}) = y$
$f(x) = tan(x)$ $Im = ?$	$Im =$ $\{y \in \mathbb{R} \mid y = -\infty \leq y \leq \infty\}$	$y = 1$
$f(x) = tan(x)$ $Dom = ?$	$Dom =$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ K \in Z\}$	$f(x) = 9tan(x)+1$ $f(\frac{\pi}{4}) = y$

$f(x) = 3 + sen(-8x)$ $P = ?$	$P = \frac{2\pi}{\lvert 8 \rvert}$	$f(x) = tan(x)$ $P = ?$
$f(x) = 3.sen(\frac{1}{2}x)$ $f(2\pi) = y$	$y = 0$	$P = \pi$
$f(x) = 7 + cos(x)$ $f(\pi) = y$	$y = 6$	$f(x) = 4cos(x)$ $f(2\pi) = y$
$f(x) = 12sen(x)$ $\text{Im} = ?$	$\text{Im} =$ $\{y \in \mathbb{R} \mid y = -12 \leq y \leq 12\}$	$y = 4$
$f(x) = tan(x)$ $f(\frac{\pi}{4}) = y$	$y = 1$	$f(x) = tan(x)$ $f(\frac{3\pi}{2}) = y$
$f(x) = sen(x)$ $Im = ?$	$Im =$ $\{y \in \mathbb{R} \mid y = -1 \leq y \leq 1\}$	$\nexists$ y
$f(x) = sen(x)$ $Dom = ?$	$Dom = \{x \in \mathbb{R}\}$	$y = 10$

Fonte: Autores (2023).

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou no quadro negro.

Referências:

ASTH, Rafael. Círculo Trigonométrico. **Toda Matéria**, *[s.d.]*. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/circulo-trigonometrico/. Acesso em: 18 mai. 2023.

ASTH, Rafael. Funções Trigonométricas. **Toda Matéria**, *[s.d.]*. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/funcoes-trigonometricas/. Acesso em: 18 mai. 2023.

GOGONI, Ronaldo. Qual é a diferença entre frequências e decibéis?. **Tecnoblog**. 2019. Disponível em: https://tecnoblog.net/responde/qual-a-diferenca-entre-frequencia-e-decibeis/. Acesso em: 18 mai. 2023.

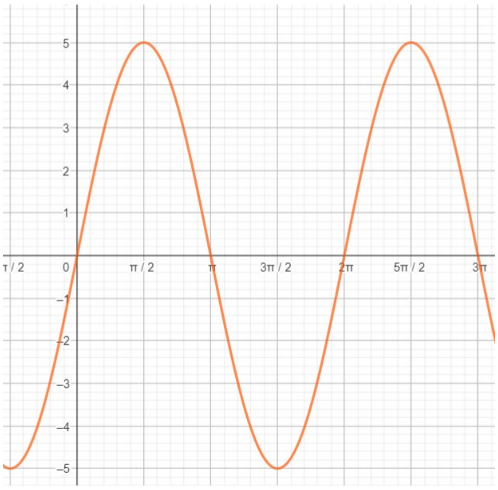
LEMOS. Matheus. Parâmetros das funções trigonométricas. **Quero bolsa**. Disponível em:https://querobolsa.com.br/enem/matematica/parametros-das-funcoes-trigonometrica. Acesso em: 18 mai. 2023.

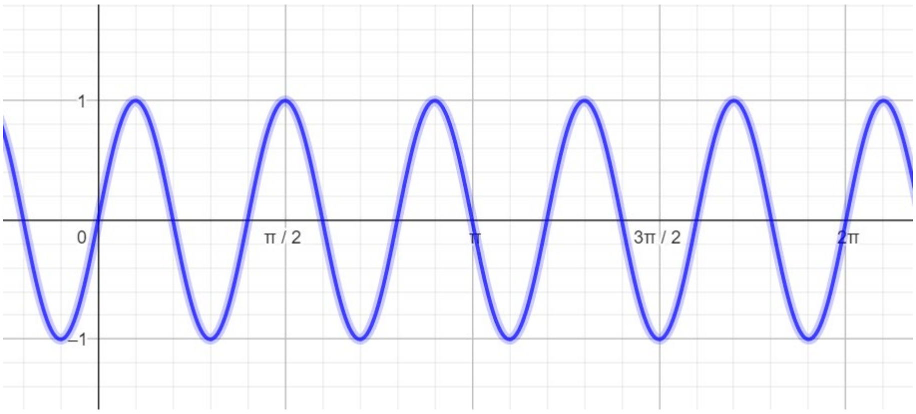
PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2009. Vol. 2.

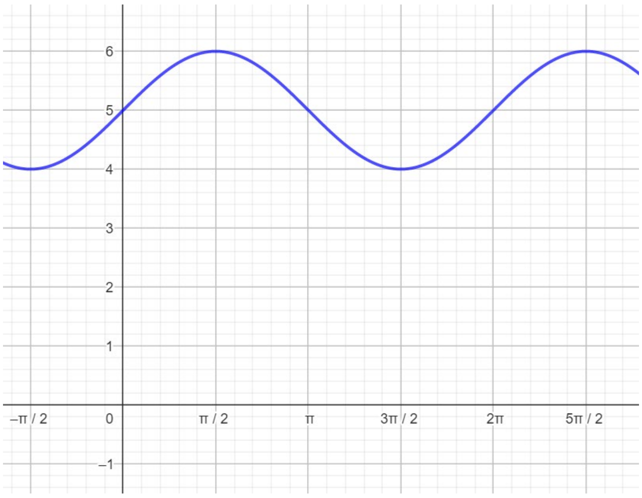
PAIVA, Manoel. *Matemática – Paiva*. São Paulo: Moderna, 2015. Vol. 2. Ed. 3.

SANDERS, Larissa. Metrônomo online: onde encontrar e como utilizá-lo. **Musicdot**. 2021. Disponível em: https://www.musicdot.com.br/artigos/metronomo-online. Acesso em: 18 mai. 2023.

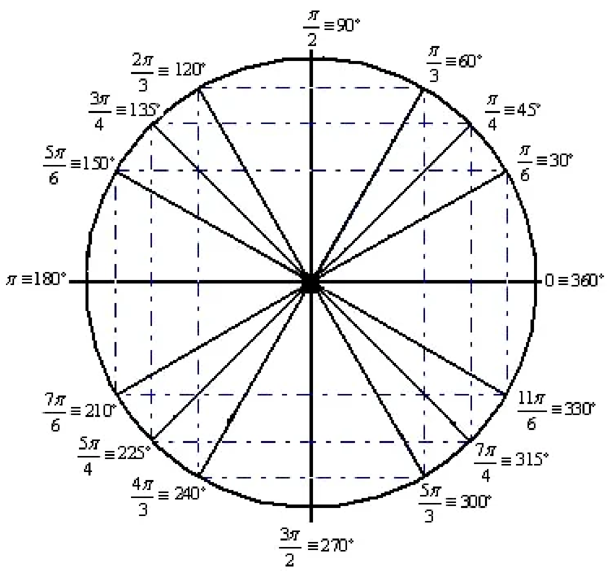
Apêndices:


5
4
3
2
1
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2
3π
−1
−2
−3
−4
−5


1
0
π / 2
π
3π / 2
2π
−1


6
5
4
3
2
1
−π / 2
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2
−1

Anexos:


$\frac{\pi}{2} \equiv 90°$
$\frac{\pi}{3} \equiv 60°$
$\frac{\pi}{4} \equiv 45°$
$\frac{\pi}{6} \equiv 30°$
$0 \equiv 360°$
$\frac{11\pi}{6} \equiv 330°$
$\frac{7\pi}{4} \equiv 315°$
$\frac{5\pi}{3} \equiv 300°$
$\frac{3\pi}{2} \equiv 270°$
$\frac{4\pi}{3} \equiv 240°$
$\frac{5\pi}{4} \equiv 225°$
$\frac{7\pi}{6} \equiv 210°$
$\pi \equiv 180°$
$\frac{5\pi}{6} \equiv 150°$
$\frac{3\pi}{4} \equiv 135°$
$\frac{2\pi}{3} \equiv 120°$

3.9.1. **Relatório – 20/05/2023**

Relatório 9 - Sala A205

No dia vinte de maio de 2023, foi realizado o nono encontro do Promat, contando com 12 alunos presentes. A manhã estava um pouco fria e o céu nublado. O conteúdo da aula foi funções trigonométricas. Assim como nos outros encontros, a aula teve início aproximadamente as oito horas e cinco minutos.

Começamos retomando os conteúdos da aula anterior, abordando os exercícios que haviam ficado sem resolução, ainda que as resoluções tivessem sido postadas no grupo do *WhatsApp* da turma. Para introduzir o conteúdo do dia, utilizamos o projetor, onde apresentamos algumas aplicações das funções trigonométricas, em particular, mencionando que elas aparecem quando lidamos com eventos que apresentam alguma periodicidade, por exemplo, quando vamos prever as altas e baixas das marés, as estações do ano e as fases da lua. Destacamos também uma aplicação em música, onde utilizamos o exemplo dos *DJ*'s que usam equipamentos para monitorar as batidas por minuto (BPM) e assim encaixar uma música após a outra sem que seja possível perceber essa mudança. Para ilustrar este exemplo, utilizamos o programa *Geogebra,* que é capaz de gerar sons de funções periódicas como seno e cosseno. Variamos os parâmetros da forma geral das funções seno e cosseno e observamos como os sons eram alterados até que estes entrassem em consonância. Durante esta parte os alunos apenas assistiram enquanto explicávamos os exemplos não apresentando dúvidas, embora o silêncio deles não deixasse claro que não as tivessem.

Após este momento, mostramos como se constrói o gráfico das funções trigonométricas, explicando suas diferenças e semelhanças com as demais relações. Explicamos que uma vez conhecida a função, podemos construir o seu gráfico e apresentamos um exemplo seguido de uma atividade de construção do gráfico da função cosseno, exemplo este que estava no material impresso distribuído aos alunos. Fomos auxiliando os alunos nesta tarefa e notamos que eles demonstraram certa dificuldade em escolher os valores dos argumentos das funções para fazer o gráfico, bem como realizar as operações para encontrar os valores dos cossenos na ordem correta. Com algumas explicações, este problema foi contornado.

Depois do intervalo continuamos a aula falando sobre período e imagem do seno, cosseno e tangente. Apresentamos estes conceitos utilizando novamente o *Geogebra*, onde mostramos como cada parâmetro das equações gerais das funções trigonométricas altera a imagem, o período e o gráficos das funções. Novos exercícios de fixação foram propostos em que eles teriam de construir os gráficos das funções dadas, mas dessa vez analisando como os coeficientes alteravam a forma do gráfico das funções. Ajudamos os alunos na construção dos gráficos.

Ao terminarmos esta atividade, propusemos aos alunos um jogo da memória com funções trigonométricas. O objetivo era formar pares de cartas, onde uma carta poderia ter, por exemplo, o argumento da função seno e a outra a respectiva imagem, ou período. Inicialmente foi necessário ajudar os alunos com o jogo, mas notamos que com o avançar dele, foram pegando o jeito. Acreditamos que este jogo ajudou os alunos a compreenderem melhor os conceitos da aula.

Com o fim do jogo, a aula foi encerrada e os alunos dispensados.

3.10. Plano de aula – 10º Encontro 27 maio 2023.

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Média, Mediana, Moda, gráficos e tabelas.

Objetivo geral: Apresentar os conceitos de Média, Mediana e Moda, bem como a prática do cálculo de cada uma delas. Apresentar os conceitos de gráficos estatísticos.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Compreender a definição da média, mediana e moda;
- Efetuar o cálculo dessas medidas a partir de um banco de dados;
- Construir e interpretar gráficos estatísticos.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook,* projetor multimidia, *softwares Excel* e *Power Point*, quadro negro e folhas de papel sulfite.

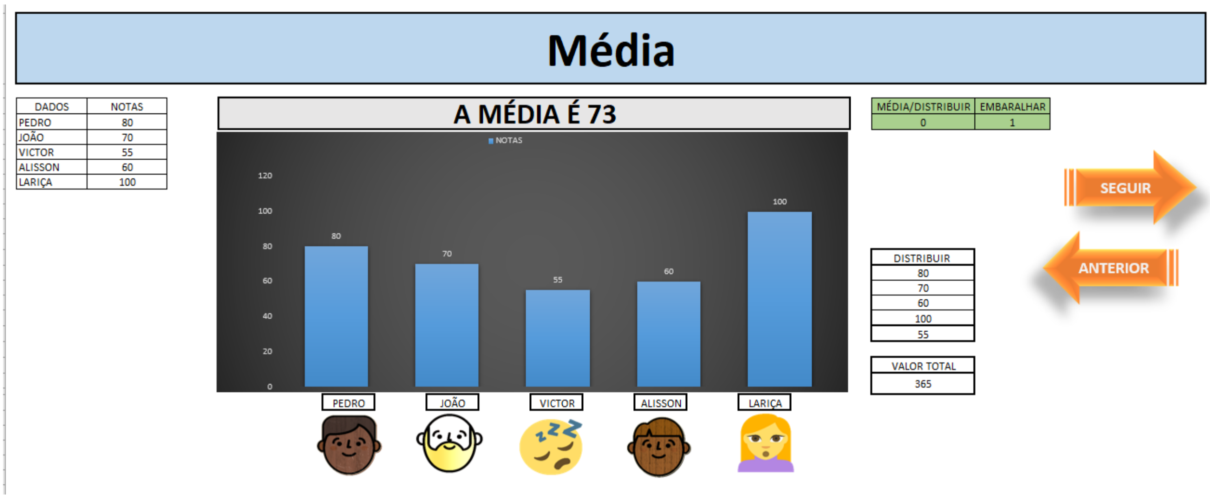
Encaminhamento metodológico:

Os alunos irão receber impresso todas as informações que estão com bordas deste plano, para que possam acompanhar o conteúdo e os exercícios da aula.

1° Momento - Apresentação e cálculo da média a partir de um rol de dados. (20 min, até as 08:20)

Neste momento vamos apresentar a ideia da média através do *software Excel*, a partir de um rol de dados. Para isso, vamos usar uma planilha, onde teremos um conjunto de notas de alguns alunos. A partir destes dados, vamos explicar como se obtém a média aritmética simples. Esta explicação será rica em detalhes, e terá uma visualização em gráfico para que os alunos possam observar o comportamento da média. Abaixo podemos ver a planilha que será usada para apresentar.

Figura 81: Planilha para explicação do conceito de média.



Fonte: Autores (2023).

Em lousa colocaremos a fórmula usual para o cálculo da média aritmética simples.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Explicaremos esta fórmula em detalhes, para que os alunos compreendam a ideia do somatório, além de explicar que existem outros tipos de médias que não falaremos nesta aula.

2° Momento - Exercício para calcular a média de um rol. (25 min, até as 08:45)

Neste momento, deixaremos dois exercícios para que os alunos aplicarem o conceito.

Exercício I

1) Em uma escola de Ensino Fundamental um concurso estabelece regras para conceder uma bolsa de estudos para o Ensino Médio. Em cada bimestre os alunos do 9.º ano realizam uma avaliação e, após os quatro bimestres, as notas são somadas. Os quatro alunos finalistas são os que alcançam as maiores pontuações. Ganhará a bolsa aquele que possuir a média mais alta das quatro notas das avaliações.
As notas dos quatro alunos finalistas são:

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Aluno A	75	86	83	91
Aluno B	78	98	67	99
Aluno C	83	84	89	87
Aluno D	98	65	87	77

O aluno que ganhou a bolsa de estudos foi:

a) o aluno A.

b) o aluno B.

c) o aluno C.

d) o aluno D.

2) Fernando está avaliando o preço médio de sua tarifa de energia elétrica nos cinco primeiros meses do ano. A planilha mostra os valores por mês, de janeiro a maio.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
R$ 173,00	R$ 113,58	R$ 145,67	R$ 98,50	R$ 123,60

Sua meta é fechar o semestre com um preço médio de R$ 130,00. Para alcançar a meta, o maior preço possível a pagar na tarifa do mês de junho, será de:

a) R$ 109,05

b) R$ 125,65

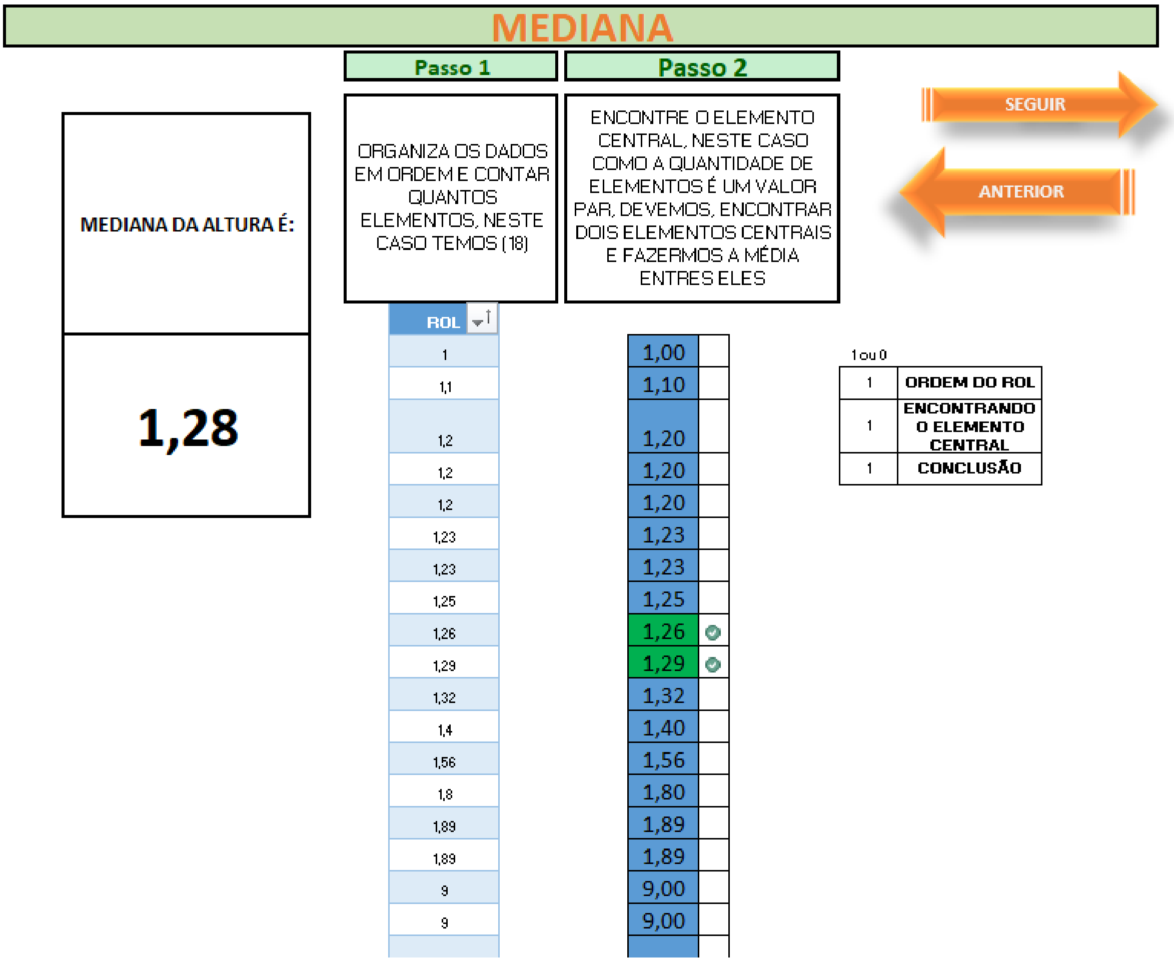
c) R$ 130,87

d) R$ 98,55

3° Momento -Apresentação e cálculo da mediana. (20 min, até as 09:05).

Vamos apresentar o conceito de mediana através de uma planilha do Excel, com dados formados pela altura de cada aluno presente na sala. Explicaremos de forma detalhada como calcular ou obter a mediana a partir de um rol de dados. Abaixo podemos ver a tabela com um rol de exemplo a ser utilizada.

Figura 82: Planilha para explicação da mediana.



Fonte: Autores (2023).

4° Momento - Exercício para calcular a mediana de um rol. (25 min, até as 09:30).

Exercícios II

1) Em um consultório de pediatria um médico atendeu nove crianças em um dia. Ele mediu e anotou as alturas das crianças conforme as consultas.

1.ª consulta	0,90 m
2.ª consulta	1,30 m
3.ª consulta	0,85 m
4.ª consulta	1,05 m
5.ª consulta	0,98 m
6.ª consulta	1,35 m
7.ª consulta	1,12 m
8.ª consulta	0,99 m
9.ª consulta	1,15 m

Determine a mediana das alturas das crianças nas consultas.

2) (Enem 2021) O gerente de uma concessionária apresentou a seguinte tabela em uma reunião de dirigentes. Sabe-se que ao final da reunião, a fim de elaborar metas e planos para o próximo ano, o administrador avaliará as vendas com base na mediana do número de automóveis vendidos no período de janeiro a dezembro.

Mês	Número de automóveis vendidos
Janeiro	25
Fevereiro	20
Março	30
Abril	35
Maio	40
Junho	50
Julho	45
Agosto	35
Setembro	60
Outubro	55
Novembro	70
Dezembro	65

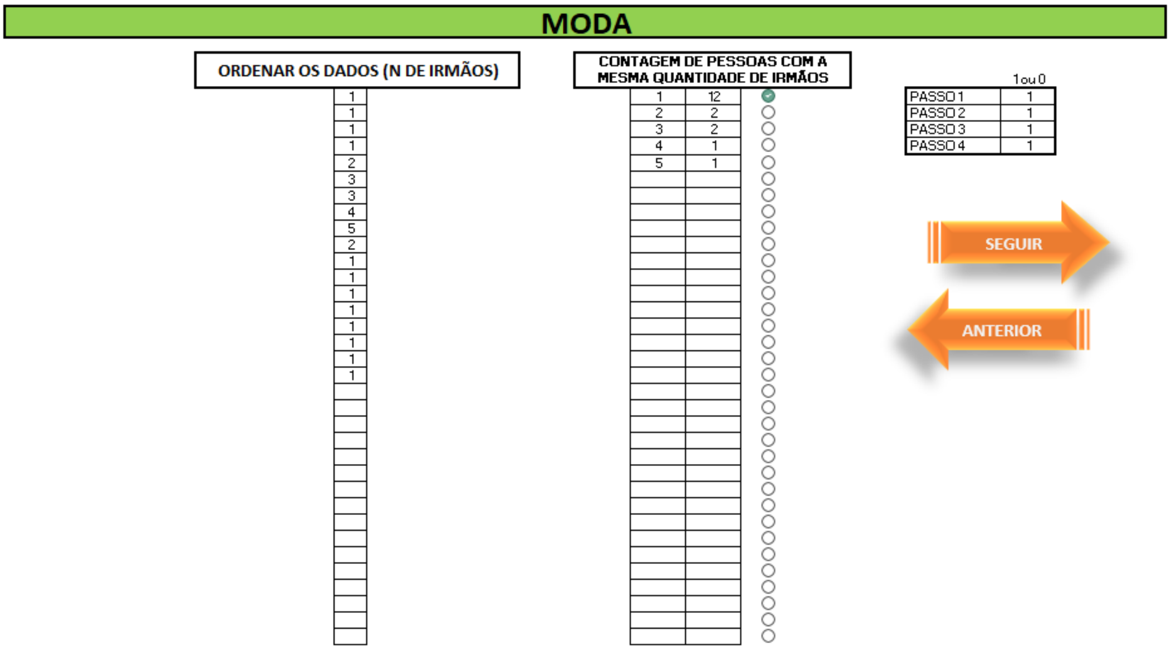
Qual foi a mediana dos dados apresentados?

a) 40,0
b) 42,5
c) 45,0
d) 47,5
e) 50,0

5° Momento - Apresentação e cálculo da moda. (10 min, até as 09:40).

O cálculo ou a obtenção da moda será apresentado novamente em uma planilha do Excel de maneira detalhada, a partir de uma nova pesquisa agora do número de irmãos que os alunos têm.

Figura 83: Planilha para explicação da moda.



Fonte: Autores (2023).

6° Momento - Intervalo (35 min, até as 10:15)

7° Momento -Exercício para calcular a moda de um rol. (20 min, até as 10:35).

Exercícios III

1) (Marinha 2014) Analise o quadro a seguir.

3	4	4	5	5	7	9
12	12	21	21	21	21	30
31	31	31	33	35	42	45
45	60	72	72	78	89	89

Assinale a opção que apresenta a moda dos dados do quadro acima.

a) 9

b) 21

c) 30

d) 30,5

e) 31

2) (Enem 2016) Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do

ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1° andar	2° andar	3° andar	4° andar	5° andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

8° Momento - Tabela de frequência (20 min, até as 10:55)

Neste momento apresentaremos a eles o conceito de tabela de frequências, a partir de um rol de dados que nós vamos disponibilizar, vamos criar uma tabela de frequência no quadro explicando cada detalhe da tabela, os alunos poderão ir copiando os resultados na tabela disponibilizada.

Figura 84: Rol a ser utilizado em aula.

Rol de notas			
0	20	60	50
90	70	80	70
10	50	50	50
70	30	10	20
70	70	80	90

Fonte: Autores (2023).

Figura 85: Tabela para distribuir as frequências.

NOTAS	fa	fr	Fa	Fr
0				
10				
20				
30				
40				
50				
60				
70				
80				
90				
100				

Fonte: Autores (2023).

Nomenclaturas:

fa: Frequência absoluta – é a quantidade de vezes que um mesmo valor de variável se repetiu

fr: Frequência relativa – é a divisão entre a frequência absoluta multiplicado por 100 e o número de dados coletados. (Frequência absoluta-**fa** expressa em porcentagem)

Fa: Frequência absoluta acumulada - Soma das frequências absolutas ao decorrer das linhas da tabela

Fr: Frequência relativa acumulada - é a divisão entre a frequência absoluta acumulada multiplicado por 100 e o número de dados coletados. (Frequência absoluta acumulada-**Fa** expressa em porcentagem)

Ao final vamos obter a seguinte tabela de distribuição de frequência:

Figura 86: Tabela preenchida.

NOTAS	fa	fr	Fa	Fr
0	1	5%	1	5%
10	2	10%	3	15%
20	2	10%	5	25%
30	1	5%	6	30%
40	0	0%	6	30%
50	4	20%	10	50%
60	1	5%	11	55%
70	5	25%	16	80%
80	2	10%	18	90%
90	2	10%	20	100%
100	0	0%	20	100%

Fonte: Autores (2023).

8° Momento - Exercício sobre tabela de distribuição de frequência (30 até as 11:25)

E sequência vamos apresentar um banco de dados com algumas notas e pediremos para que construção uma tabela de frequência.

Exercícios IV

1) Abaixo podemos ver a notas que os 20 alunos da classe obtiveram, a partir dela construa/complete a tabela de frequência.

Figura 87: Rol para exercício.

Rol de notas			
10	80	90	40
90	60	80	70
30	50	50	30
70	40	70	80
100	100	80	90

Fonte: Autores (2023).

Figura 88: Tabela para exercício.

NOTAS	fa	fr	Fa	Fr
0				
10				
20				
30				
40				
50				
60				
70				
80				
90				
100				

Fonte: Autores (2023).

Após um tempo com os alunos fazendo vamos apresentar a tabela construída, explicado os pontos onde observamos maiores dúvidas por parte dos alunos.

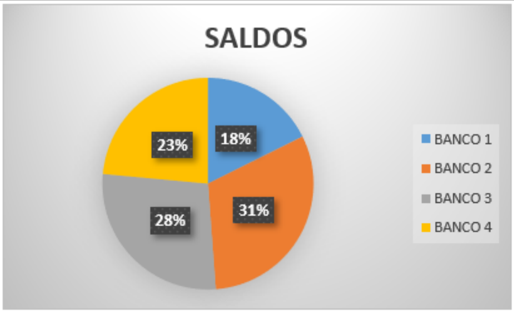
9° Momento - Apresentação de gráficos de barras, setores, histograma e de linha. (15 min, até as 11:40).

Apresentaremos alguns tipos de gráficos estatísticos em uma planilha *Excel*. Discutiremos com os alunos as aplicações de cada tipo de gráfico, bem como a exemplificação de alguns casos, comentando sobre como interpretar cada um.

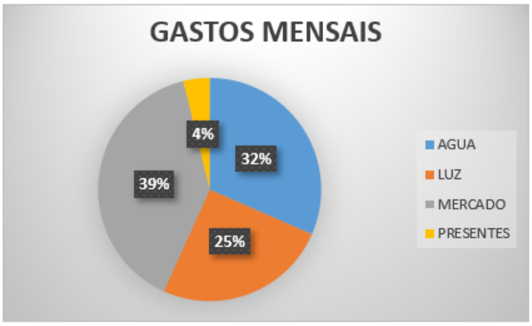
Figura 89: Planilha para apresentação do gráfico de setores.

GRAFICO DE SETORES

CONTA	SALDOS	
BANCO 1	R$	1.500,00
BANCO 2	R$	2.648,00
BANCO 3	R$	2.349,00
BANCO 4	R$	2.000,00



DESPESA	GASTOS MENSAIS	
AGUA	R$	2.000,00
LUZ	R$	1.597,00
MERCADO	R$	2.500,00
PRESENTES	R$	240,00

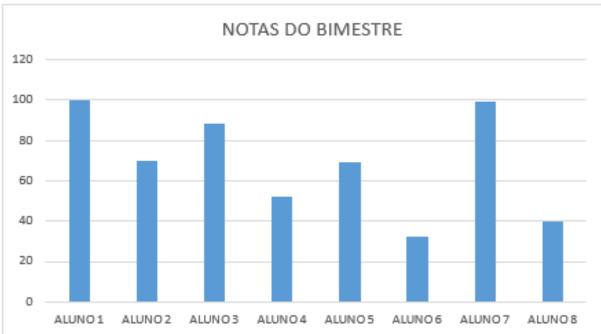


Fonte: Autores (2023).

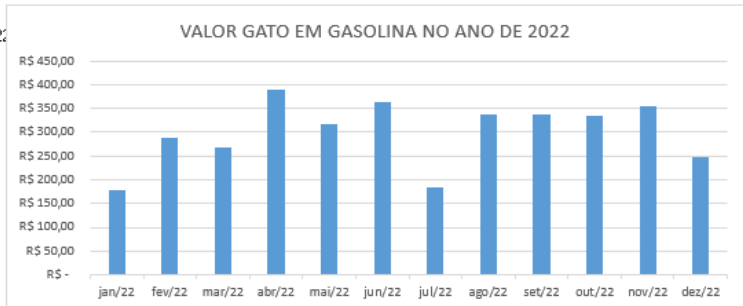
Figura 90: Planilha para apresentação do gráfico de barras.

GRÁFICO DE BARRAS

ALUNO	NOTAS
ALUNO 1	100
ALUNO 2	70
ALUNO 3	88
ALUNO 4	52
ALUNO 5	69
ALUNO 6	32
ALUNO 7	99
ALUNO 8	40



MESES	LOR GATO EM GASOLINA NO ANO DE 202	
jan/22	R$	179,00
fev/22	R$	287,00
mar/22	R$	267,00
abr/22	R$	391,00
mai/22	R$	318,00
jun/22	R$	363,00
jul/22	R$	184,00
ago/22	R$	338,00
set/22	R$	337,00
out/22	R$	336,00
nov/22	R$	356,00
dez/22	R$	247,00

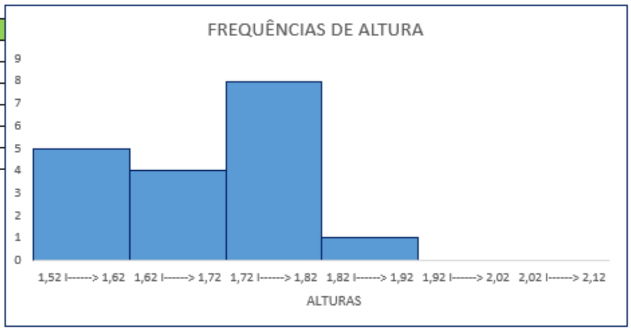


Fonte: Autores (2023).

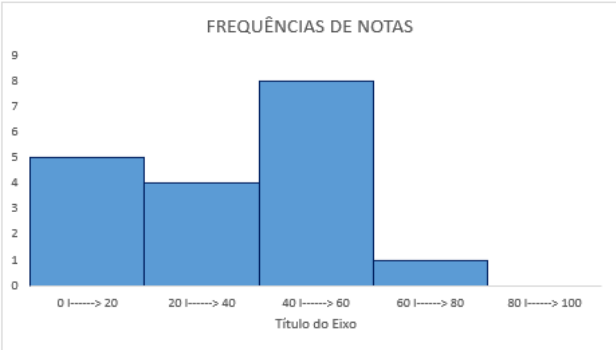
Figura 91: Planilha para apresentação do gráfico histograma.

GRÁFICO HISTOGRAMA

INTERVALO	FREQUÊNCIAS DE ALTURA
1,52 I------> 1,62	5
1,62 I------> 1,72	4
1,72 I------> 1,82	8
1,82 I------> 1,92	1
1,92 I------> 2,02	0
2,02 I------> 2,12	0



INTERVALO	FREQUÊNCIAS DE NOTAS
0 I------> 20	5
20 I------> 40	4
40 I------> 60	8
60 I------> 80	1
80 I------> 100	0

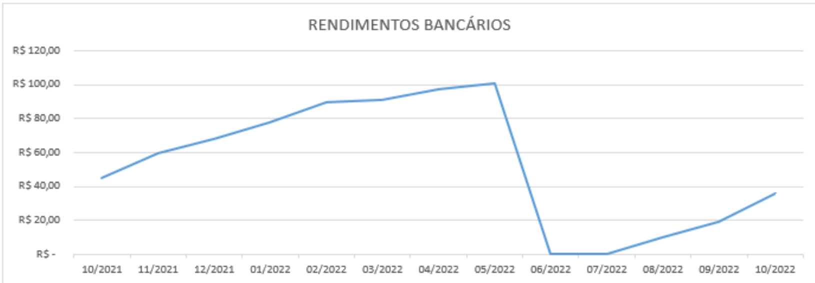


Fonte: Autores (2023).

Figura 92: Planilha para apresentação do gráfico de linha.

GRÁFICO DE LINHA

RENDIMENTOS		
PERIODO	VALOR	
10/2021	R$	44,66
11/2021	R$	59,60
12/2021	R$	67,80
01/2022	R$	77,83
02/2022	R$	89,60
03/2022	R$	91,00
04/2022	R$	97,00
05/2022	R$	101,00
06/2022	R$	-
07/2022	R$	-
08/2022	R$	10,00
09/2022	R$	18,75
10/2022	R$	36,07



DESPESAS		
PERIODO	VALOR	
10/2021	R$	1.040,00
11/2021	R$	1.050,00
12/2021	R$	1.200,00
01/2022	R$	1.590,00
02/2022	R$	2.640,00
03/2022	R$	3.450,00
04/2022	R$	150,00
05/2022	R$	260,00
06/2022	R$	4.050,00
07/2022	R$	4.880,00
08/2022	R$	5.100,00
09/2022	R$	187,50
10/2022	R$	360,70

Fonte: Autores (2023).

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou no quadro.

Referências:

Asth. Rafael C. toda matéria, Exercícios de média Aritmética. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-media-aritmetica/. Acesso em 22 Abril. 2023.

ENEM 2021 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 26 abril. 2023.

Garofalo. Débora: Professor, use mais (e melhor) o Excel em suas aulas. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/12535/professor-use-mais-e-melhor-o-excel-em-suas-aulas. Acesso em: 26 abril. 2023.

3.10.1. **Relatório – 27/05/2023**

Relatório 10 - Sala A205

No dia vinte e sete de abril de 2023, em uma manhã parcialmente nublada, foi realizado o décimo e último encontro do Promat, onde contamos com a presença de 18 alunos, uma quantidade um pouco maior que a usual. O aumento no número de alunos não nos surpreendeu, visto que este encontro foi o último. O tema da aula foi de medidas de tendência central. A aula teve início as oito horas e três minutos.

Antes do início da aula, entregamos os resumos do conteúdo da aula anterior para os alunos que haviam faltado. Para esta aula preparamos um conteúdo diferente dos outros encontros. Por se tratar de um conteúdo de estatística, em particular, de análise de dados, preparamos uma aula com as explicações sendo feitas com auxílio do *software Excel*, ainda que exercícios tenham sido propostos aos alunos para fixação dos conceitos. Os conteúdos abordados foram, média, mediana, moda, tabela de frequências e gráficos, e o uso do *Excel* teve por objetivo mostrar para os alunos algumas das diversas utilidades deste programa, visto que este tem um imenso campo de aplicação no mercado de trabalho. Como nossos alunos estão no ensino médio, e se ainda não estão, vão estar em breve no mercado de trabalho, entendemos que conhecer as facilidades de cálculo e automações do *Excel* poderia entusiasmá-los.

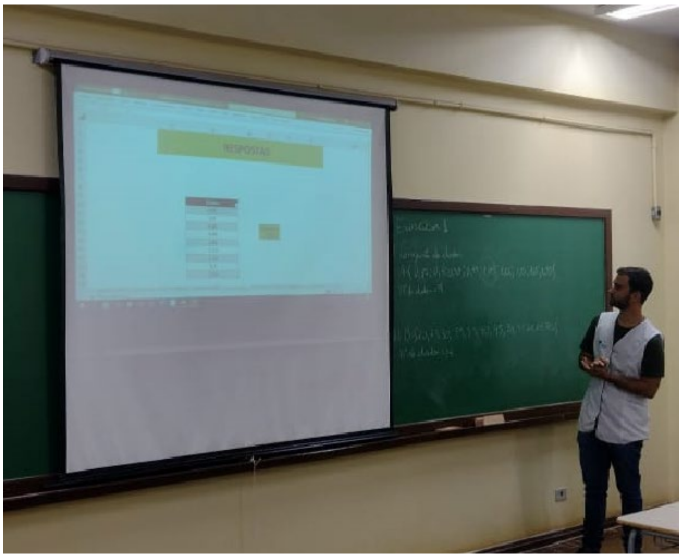
Iniciamos a aula apresentando para eles o tema que seria abordado, comentando algumas de nossas experiencias positivas no mercado de trabalho que ocorreram devido ao conhecimento do *software Excel*. Em seguida, passamos para apresentar como calculamos a média aritmética simples. Com o auxílio de uma planilha do programa, apresentamos junto com um gráfico, a média de um rol de dados. A variação automática com a troca de valores no rol, permitiu uma visualização da distribuição da média, variando os valores do rol para todos iguais a média e depois para quantidades distribuídas de forma não uniforme. Deste modo, os alunos puderam observar o porquê que devemos adicionar ou retirar um valor alto no rol para aumentar ou diminuir a média. Em seguida, deixamos um tempo para os alunos resolverem alguns exercícios que preparamos. Vários alunos resolveram facilmente os dois exercícios propostos, enquanto alguns tiveram alguma dificuldade.

Em seguida, apresentamos a resolução dos exercícios em lousa. Em um deles, os alunos identificaram problemas devido o uso das casas decimais no cálculo.

Explicamos que isso ocorreria mesmo e que se deve ao número de casas decimais em que cada um usa em cada cálculo. A resolução foi exposta no *Excel* também e nesta resolução não houve problema, pois o número de casas decimais que o *software* usa eliminava o problema. Explicamos que em certos contextos, dentro de uma empresa, esta exatidão oferecida pelo *Excel* pode mudar resultados de maneira significativa em cálculos que necessitam de alta precisão.

O conceito de mediana foi apresentado através da planilha, o que agilizou muito o processo de ordenação dos dados, pois realizar essa ordenação manualmente em lousa demandaria tempo e não agregaria conhecimento para os alunos. Realizamos uma pesquisa, solicitando a altura de cada aluno, obtendo 18 alturas para compor o nosso rol de dados, já que todos os alunos contribuíram. Após a explicação dos cálculos da mediana para esses dados, disponibilizamos dois exercícios para os alunos praticarem. Como de costume, íamos até a carteira do aluno que nos solicitava ajuda. Algum tempo depois, apresentamos as resoluções no quadro. Na imagem abaixo podemos ver um dos estagiários apresentado a resolução em lousa com o auxílio do *Excel* para facilitar no processo de ordenação dos dados.

Figura 93: Resolução de exercícios sobre mediana, com o auxílio do *Excel*.

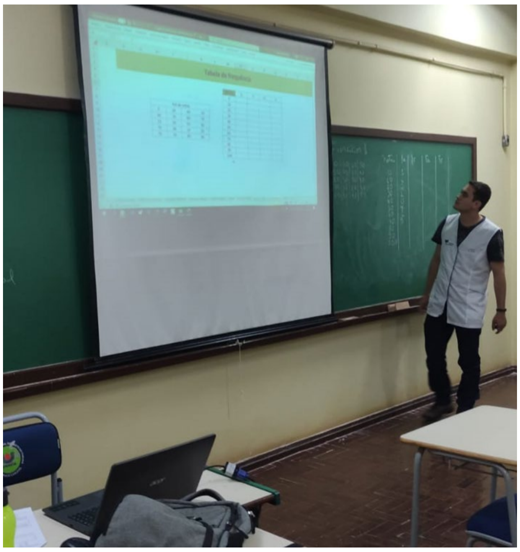


Fonte: Autores (2023)

Após este momento seguimos para o intervalo, retornando desta fez um pouco mais tarde, as 10:15. Apresentamos então o conceito de moda, novamente fazendo isso em uma planilha do *Excel*. Realizamos novamente uma pesquisa com os alunos, desta vez solicitando o número de irmãos de cada um deles. Esses dados foram utilizados para compor o nosso rol utilizado como exemplo para a apresentação do conceito da moda. Após a explicação, disponibilizamos um tempo para os alunos realizarem exercícios propostos. Muitos conseguiram realizá-los rapidamente, e logo apresentamos a resolução no quadro, além de apresentar no *software* também.

Após isto, iniciamos a apresentação do conceito de tabela de frequência, tendo como referência um conjunto de dados exemplo que preparamos no programa. A imagem abaixo retrata este momento.

Figura 94: Apresentação da tabela de frequência.



Fonte: Autores (2023).

Disponibilizamos novamente um tempo para os alunos completarem uma tabela de frequências dada como exercício. Alguns apresentaram dúvidas nesta etapa e confundiram alguns tipos de frequência (absoluta, relativa, relativa em porcentagem) mas, com nosso auxílio, todos conseguiram completar corretamente. Convidamos então alguns alunos que demonstraram interesse em apresentar em lousa o resultado, visto que havia tempo suficiente para isso. Após isto, apresentamos como este processo poderia ser realizado no *Excel*. Abaixo podemos observar uma parte deste momento.

Figura 95: Resolução da tabela de frequências com o *Software Excel*.

Fonte: Autores (2023).

Chegamos então ao último conteúdo programado da aula. Neste momento, apresentamos os tipos de gráficos que podemos construir a partir de diferentes representações de dados, bem como realizar essas construções utilizando o programa, enfatizando as aplicações diversas dentro de uma empresa, muito útil em tomadas de decisões importantes. Abaixo podemos ver um retrato desse momento.

Figura 96: Apresentação de gráficos através do *Excel*.

Fonte: Autores (2023).

Após a apresentação dos gráficos, a aula foi finalizada com o agradecimento aos alunos, além de explicarmos sobre como se daria a certificação do curso.

4. **Considerações finais**

Esta é a consolidação de um intenso trabalho realizado entre março de 2023 e maio de 2023, na cidade de Cascavel-Pr. Período este que foi de ampliação de conhecimentos, onde pudemos enfrentar desafios, testar novos modos de apresentar uma aula, e ainda transmitir conhecimento aos alunos que decidiram assistir nossas aulas.

Este trabalho nos levou a dedicação intensiva em cima do seu planejamento e se estendeu até a sua aplicação. Com a colaboração de todos os envolvidos, podemos conclui-lo com sucesso, executando tudo conforme havíamos planejado. No final do projeto estávamos ansiosos por não termos certeza se ele seria concluído a tempo, visto que a greve docente na Unioeste estava em seu início. Felizmente, foi possível concluir o projeto no dia 27 de maio de 2023 sem nenhum impedimento devido ao ato de greve.